Алгебра II, осенний семестр 2014 г.

Задачи для подготовки к зачёту.

факультет математики, НИУ ВШЭ

Задача 1. Найдите значение симметрического многочлена $F(x_1, x_2, x_3)$ от корней многочлена $f(x)$:

(а) $F(x_1, x_2, x_3) = x_1^3(x_2 + x_3) + x_2^3(x_1 + x_3) + x_3^3(x_1 + x_2)$, $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 1$;

(б) $F(x_1, x_2, x_3) = x_1^4 x_2 + x_1^4 x_3 + x_2^4 x_1 + x_2^4 x_3 + x_3^4 x_1 + x_3^4 x_2$, $f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 1$.

Задача 2. Решите над $\mathbb{C}$ систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \\ x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 24. \end{cases}$$

Задача 3. (а) Пусть $F \subset \mathbb{C}$ минимальное подполе, содержащее все корни многочлена $x^3 + x + 1$. Лежит ли $\sqrt{-3}$ в F?

(б) Рассмотрим кривую C в $\mathbb{R}^2$, заданную уравнением

$$y^3 - 4yx^2 + x^4 = 0.$$

Для каких точек $p \in C$ теорема о неявной функции позволяет представить C в окрестности точки p как график гладкой функции $y = f(x)$?

Задача 4. Разложите многочлены на неприводимые в $\mathbb{Q}[x]$:

(а) $x^3 - 3x + 2$; (б) $x^5 - 3x^4 + 3$; (в) $x^3 + 2x^2 + 3x + 1$; (г) $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 2$.

Задача 5. (а) Пусть $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-6}]$. Разложите идеал (6) на простые.

(б) Пусть $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$. Определите, является ли 11 неприводимым элементом в R, и является ли идеал (11) простым идеалом в R.

Задача 6. (а) Найдите все простые идеалы в кольце $\mathbb{C}[x, y]$.

(б) Покажите, что в кольце $\mathbb{C}[x, y]$ нет однозначности разложения идеала в произведение простых идеалов.

Задача 7. Пусть R — коммутативное кольцо, а I и J — два различных идеала в R.

(а) Верно ли, что если I и J просты, то они взаимно просты (то есть $I + J = R$)?

(б) Верно ли, что если I и J максимальны, то они взаимно просты?

Задача 8. Какие простые числа $p \in \mathbb{N}$ представляются в виде

(а) $x^2 + 2y^2$; (б) $x^2 + xy + 2y^2$; (в) $x^2 + 5y^2$

для целых x и y?

Problem 1. Find the value of the symmetric polynomial $F(x_1, x_2, x_3)$ at the roots of the polynomial $f(x)$:
(a) $F(x_1, x_2, x_3) = x_1^3(x_2 + x_3) + x_2^3(x_1 + x_3) + x_3^3(x_1 + x_2)$, $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 1$;
(b) $F(x_1, x_2, x_3) = x_1^4 x_2 + x_1^4 x_3 + x_2^4 x_1 + x_2^4 x_3 + x_3^4 x_1 + x_3^4 x_2$, $f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 1$.

Problem 2. Solve over $\mathbb{C}$ the system of equations

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \\ x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 24. \end{cases}$$

Problem 3. (a) Let $F \subset \mathbb{C}$ be the splitting field of $x^3 + x + 1$. Does $\sqrt{-3}$ lie in F?
(b) Consider the curve C in $\mathbb{R}^2$ defined by the equation

$$y^3 - 4yx^2 + x^4 = 0.$$

Find all points $p \in C$ such that C in a vicinity of p can be represented as the graph of a smooth function $y = f(x)$ by the implicit function theorem.

Problem 4. Factor the following polynomials in $\mathbb{Q}[x]$:
(a) $x^3 - 3x + 2$; (b) $x^5 - 3x^4 + 3$; (c) $x^3 + 2x^2 + 3x + 1$; (d) $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 2$.

Problem 5. (a) Let $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-6}]$. Factor the ideal (6) into primes.
(b) Let $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$. Determine whether or not 11 is an irreducible element of R and whether or not (11) is a prime ideal in R.

Problem 6. (a) Determine the prime ideals of the ring $\mathbb{C}[x, y]$.
(b) Show that unique factorization of ideals does not hold in the ring $\mathbb{C}[x, y]$.

Problem 7. Let R be a commutative ring, and I, J distinct ideals in R.
(a) Is it true that if I and J are prime, then they are relatively prime (that is, $I + J = R$)?
(b) Is it true that if I and J are maximal, then they are relatively prime?

Задача 9. Determine the primes $p \in \mathbb{N}$ that can be represented by
(a) $x^2 + 2y^2$; (b) $x^2 + xy + 2y^2$; (c) $x^2 + 5y^2$
for integer x and y.