Список тем курсовых и дипломных работ

А. Г. Горинов, gorinov@mccme.ru

This is a list of student research projects, in Russian. If you wish to get a copy in English, please let me know.

Сферическая геометрия и определение долготы (только для 1-2 курсов). Представьте себе, что вы плывете на корабле в открытом океане и хотите понять, где вы находитесь. Широту корабля определить несложно, но как определить долготу? Это тоже не очень сложно сделать, если иметь часы, которые показывают время в начале отсчета, например, в Гринвиче. Если же часов нет, то в качестве их замены можно использовать Луну: она довольно быстро движется по небу. В этом проекте предлагается разобраться, как именно работает метод лунных расстояний, а также познакомиться с элементами сферической геометрии, а заодно и гиперболической тоже.

Автоморфизмы эллиптических кривых, теорема Понселе и ее варианты. Пусть E_1, E_2 — два эллипса на плоскости. Предположим, что E_2 лежит внутри E_1. Рассмотрим такой процесс: пусть $P_0 \in E_1$. Проведем через P_0 касательную прямую к E_2. Она пересечет E_1 в двух точках. Одна из них — P_0, а вторую мы обозначим через P_1. Проведем через P_1 другую касательную к E_2, которая пересечет E_1 в точках P_1 и P_2, и т.д. Получим последовательность точек $P_0, P_1, P_2, \ldots$. Теорема Понселе утверждает, что если эта последовательность периодична для некоторой начальной точки P_0, то она периодична для любой другой начальной точки, причем с тем же периодом.

Комплексные эллиптические кривые — это компактные комплексные кривые рода 1, т.е., кривые, гомеоморфные поверхности бублика. У таких бубликов есть автоморфизмы конечного порядка, при которых орбиты всех точек имеют одинаковое число элементов. Наиболее простое доказательство теоремы Понселе основано на этом замечании.

В данном проекте предлагается разобраться с доказательством теоремы Понселе, а также придумать и доказать какую-нибудь вариацию на ее тему. Например, можно попробовать доказать такое утверждение: пусть C_1, C_2, C_3 — попарно непересекающиеся окружности на плоскости, такие что C_1 находится внутри C_2, а C_2 — внутри C_3. Выберем точку $P_0 \in C_2$ и проведем через нее окружность, касающуюся C_1 и C_3. Эта окружность пересечет C_2 в двух точках, одна из которых — P_0, а другую мы назовем P_1. Проведем через P_1 вторую окружность, касающуюся C_1 и C_3. Эта окружность пересечет C_2 в P_1 и P_2 и т.д. Утверждение такое же, как и в теореме Понселе: если последовательность $P_0, P_1, P_2, \ldots$ периодична для какого-то выбора начальной точки P_0, то она периодична с тем же периодом для любой другой начальной точки.

Комплексные структуры на сферах. Известная теорема Бореля-Серра говорит, что на S^n нет почти комплексной структуры, если $n \neq 2, 6$. Первоначальное доказательство было довольно витиеватым, но потом выяснилось, что этот результат можно просто получить с помощью топологической K-теории. Цель данного проекта — познакомиться с топологической K-теорией и доказать некоторые новые результаты в этом направлении (например, для произведений произвольного числа сфер).

Обобщенные условия Шварценбергера. Классы Черна комплексных векторных расслоений на $\mathbb{C}P^n$ не могут быть произвольными. Например, для двумерных расслоений произведение $c_1 c_2$ всегда четно, а для трехмерных оно равно c_3 по модулю 2. Эти условия называются условиями Шварценбергера. Их аналоги имеются для произвольных комплексно ориентированных многообразий, т.е, например, многообразий, у которых первый касательный класс Штифеля-Уитни 0, а второй касательный класс Штифеля-Уитни приходит из целочисленных когомологий. Это выводится из топологической теоремы Римана-Роха, но в случае комплексных проективных пространств все особенно упрошается, так как в K-теории есть некоторый выделенный базис. Цель данного проекта в том, чтобы найти подобные базисы для, например, грассманианов и попытаться явно выписать обобщенные условия Шварценбергера.

Геометрическая конструкция связности Леви-Чивиты. Пусть E, B — гладкие многообразия, $f : E \to B$ — расслоение. Связность на E — это подрасслоение $\xi \subset TE$, дополнительное к $f^*(TB)$, т.е., такое что $TE = \xi \oplus f^*(TB)$. Иначе говоря, связность — это набор подпространств $\xi_x \subset T_x E, x \in E$, гладко зависящий от x, и такой, что для каждого $x \in E$ дифференциал df_x изоморфно отображает ξ_x на $T_{f(x)} B$.

Если на B есть риманова метрика, $E = TB$, а f — естественная проекция, то на E имеется единственная связность без кручения, согласованная с метрикой. Доказательство этого использует некоторое вычисление в координатах.

Эта связность называется связностью Леви-Чивиты. Заметим, что она нам дает некоторую выделенную метрику на TE. Цель данного проекта — придумать бескоординатную конструкцию этой метрики (или еще как-нибудь геометрически сконструировать связность Леви-Чивиты). Вместо TB в качестве E можно взять главное $O_n(\mathbb{R})$-расслоение ортонормированных реперов в TB, где $n = \dim B$.

Теорема де Рама. Пусть M — гладкое многообразие. Имеются два комплекса, которые считают вещественные когомологии M: комплекс $C^*(M)$ гладких сингулярных коцепей и комплекс $\Omega^*(M)$ дифференциальных форм. Имеется естественное отображение интегрирования

$$\int : \Omega^*(M) \to C^*(M).$$

Цели данного проекта — разобраться в следующем.

- Отображение $\int$ согласовано с дифференциалами и является квазиизоморфизмом, т.е., индуцирует изоморфизм векторных пространств когомологий.
- На $C^*(M)$ и $\Omega^*(M)$ есть умножения, согласованные с дифференциалами: например, для p-формы ω и q-формы η определено их внешнее произведение $\omega \wedge \eta$ и имеет место соотношение

  $$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge \eta.$$

  Как показывают простейшие примеры, $\int$ не является отображением алгебр. Тем не менее, $\int$ индуцирует изоморфизм алгебр когомологий $H^*(\Omega^*(M)) \to H^*(C^*(M))$.
- Более общо, можно написать "старшие поправки" к $\int$, дополняющие его до квазиизоморфизма A_∞-алгебр. Т.е., вещественные сингулярные коцепи и дифференциальные формы знают о гомотопическом типе M одно и то же.

Конические разрешение дискриминантов и примемения к пространствам модулей. Цель данного проекта — применить метод конических разрешений Васильева к вычислению рациональных когомологий, например, следующих пространств и соответствующих пространств модулей: например,

- Пространств модулей поверхностей дель Пеццо (это совсем просто).
- Пространство квартик в $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ с особенностями не хуже A_1, т.е., имеющих, возможно, самопересечения, но не имеющих худших особенностей.
- Пространство GIT-стабильных квартик в $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.
- То же, что в двух предыдущих пунктах, но для кубик в $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$.
- Пространство неособых вещественных квартик в $\mathbb{P}^2$ или кубик в $\mathbb{P}^3$. Неособость в вещественном случае может пониматься в двух смыслах: мы можем требовать, чтобы соответствующая комплексная гиперповерхность была неособа, а можем требовать просто, чтобы у нее не было вещественных особенностей. Оба случая интересны.

Лемма Бейлинсона. Пусть X — аффинное комплексное алгебраическое многообразие, а $\mathcal{F}$ — конструктивный пучок на X. Тогда найдется замкнутое по Зарисскому множество $Y \subset X$, такое что для всех i, кроме, может быть, $i = \dim X$, имеем

$$H^i(X, Y, \mathcal{F}) = H^i(X, j_! j^{-1}\mathcal{F}) = 0,$$

где $j : X \setminus Y \subset X$ — открытое вложение. Это утверждение называется леммой Бейлинсона. Оно очень полезно и много где используется. Например, оно нам говорит, что такое алгебро-геометрический аналог клетки в топологии: это аффинное многообразие и конструктивный пучок на нем, не имеющий когомологий нигде, кроме размерности, равной размерности многообразия.

Цель данного проекта в том, чтобы доказать это утверждение с помощью теории Морса. Кроме того, можно попробовать придумать и доказать аналог для многообразий Штейна.

Комбинаторная структура псевдоаносовских автоморфизмов. Пусть S — поверхность, т.е., 2-мерное компактное гладкое многообразие, возможно, с краем. По теореме Тёрстона, с точностью до изотопии, автоморфизмы S, т.е. гомеоморфизмы $S \to S$, делятся на 3 класса:

- автоморфизмы конечного порядка (эллиптический случай).

- автоморфизмы, сохраняющие систему замкнутых непересекающихся кривых, ни одна из которых не стягиваема и не изотопна компоненте границы (разложимый случай).

- все остальное (псевдоаносовский случай).

Например, автоморфизм тора $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, индуцированый элементом $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, эллиптический, если $|\,tr(A)| < 2$, разложим, если $|\,tr(A)| = 2$, и псевдоаносовский, если $|\,tr(A)| > 2$.

Если граница S непуста, то псевдоаносовские автоморфизмы допускают явное комбинаторное описание в терминах некоторого графа $\subset S$, на который S стягивается. Цель данного проекта — понять это описание.