

Задачи для семинара 8.

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

Задача 1. Пусть Δ_n — правильный n -угольник с вершинами в корнях n -ой степени из единицы. Выпишите матрицы всех движений плоскости, сохраняющих Δ_n для
(а) $n = 3$; (б) $n = 4$.

Задача 2. Найдите группу всех движений пространства \mathbb{R}^n , сохраняющих симплекс

$$\Delta_n = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i = 1, x_i \geq 0, i = 1, \dots, n \right\}$$

для (а) $n = 2$; (б) $n = 3$; (в) $n = 4$; (г) произвольного n .

Задача 3. (а) Пусть G — конечная подгруппа группы движений плоскости. Докажите, что все элементы $g \in G$ имеют общую неподвижную точку x (то есть $g(x) = x$ для каждого $g \in G$).

(б) Классифицируйте все конечные подгруппы в группе движений плоскости.

Задача 4. Докажите, что группа вращений трёхмерного пространства, сохраняющих куб, изморфна S_4 .

Задача 5. Пусть G — группа вращений трёхмерного пространства, сохраняющих правильный додекаэдр.

(а) Рассмотрим три действия группы G : на множестве вершин, рёбер и граней додекаэдра. Для каждого действия найдите все орбиты и стабилизаторы.

(б) Найдите порядок группы G .

(в) Докажите, что G изоморфна A_5 .