

Задачи для семинара 9.

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

Задача 1. Найдите все характеры (=одномерные представления) группы
(а) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$; (б) S_3 ; (в) A_4 ; (г) D_5 .

Задача 2. (а) Докажите, что две перестановки из S_n лежат в одном классе сопряжённости тогда и только тогда, когда они имеют одинаковый циклический тип.

(б) Найдите число классов сопряжённости в S_4 .

(в) Найдите число классов сопряжённости в D_n .

Задача 3. Обозначим через G группу вращений трёхмерного пространства, сохраняющих параллелепипед

$$P = \{-1 \leq x_1 \leq 1, -1 \leq x_2 \leq 1, -2 \leq x_3 \leq 2\}.$$

Разложите тавтологическое представление группы G в прямую сумму неприводимых.

Задача 4. Постройте два неизоморфных неприводимых двумерных представления диэдральной группы D_5 . (Два представления $\rho_1 : G \rightarrow GL(V_1)$ и $\rho_2 : G \rightarrow GL(V_2)$ группы G называются *изоморфными*, если есть изоморфизм $\phi : V_1 \rightarrow V_2$ векторных пространств, такой что $\phi \circ \rho_1(g) = \rho_2(g) \circ \phi$ для всех $g \in G$.)

Задача 5. Определим представление группы $SU_2(\mathbb{C})$ на вещественном пространстве $\mathfrak{su}_2(\mathbb{C})$ всех косоэрмитовых комплексных 2×2 -матриц с нулевым следом:

$$\rho(g)A = gAg^{-1}, \text{ где } g \in SU_2(\mathbb{C}), A \in \mathfrak{su}_2(\mathbb{C})$$

(такое представление называется *присоединённым*).

(а) Проверьте корректность определения.

(б) Постройте на $\mathfrak{su}_2(\mathbb{C})$ положительно определённую $SU_2(\mathbb{C})$ -инвариантную симметрическую форму. Обозначим через $SO_3(\mathbb{R})$ группу всех операторов на $\mathfrak{su}_2(\mathbb{C})$, сохраняющих эту форму.

(в) Вычислите размерности групп $SU_2(\mathbb{C})$ и $SO_3(\mathbb{R})$ как вещественных многообразий.

(г) Докажите, что гомоморфизм $\rho : SU_2(\mathbb{C}) \rightarrow SO_3(\mathbb{R})$ является двулистным накрытием.