Алгебра II, осенний семестр 2014 г.

**Задачи для семинара 10.**

факультет математики, НИУ ВШЭ

**Задача 1.** Классифицируйте все неприводимые конечномерные комплексные представления циклической группы порядка $n$.

**Задача 2.** (а) Докажите, что в любом унитарном неприводимом двумерном представлении $\rho : S_3 \to GL_2(\mathbb{C})$ можно выбрать ортонормальный базис так, что

$$\rho : (1\ 2) \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Какой вид в этом базисе может иметь матрица $\rho(1\ 2\ 3)$?

(б) Докажите, что у $S_3$ есть только одно неприводимое двумерное представление с точностью до изоморфизма.

(в) Пусть $\rho : S_3 \to GL(V)$ — произвольное представление. Докажите, что собственный вектор оператора $\rho(1\ 2\ 3)$ лежит в $S_3$-инвариантом подпространстве размерности не выше 2.

(г) Классифицируйте все неприводимые представления группы $S_3$.

**Задача 3.** Выпишите таблицу характеров всех неприводимых представлений группы

(а) $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$; (б) $D_4$; (в) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

**Задача 4.** Пусть $G$ — конечная группа порядка $n$. Рассмотрим $n$-мерное комплексное векторное пространство, и занумеруем какой-нибудь базис $\{e_g\}_{g\in G}$ в $V$ элементами группы. Определим *регулярное представление* $\rho : G \to GL(V)$ следующим образом

$$\rho(h)e_g = e_{hg}.$$

Разложите на неприводимые представления регулярное представление группы

(а) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$; (б) $S_3$; (в) $D_4$.

**Задача 5.** Определим представление $\rho_n$ группы $SU_2(\mathbb{C})$ на пространстве $\mathbb{C}^n[x, y]$ однородных многочленов степени $n$ от двух переменных

$$\rho_n(A)f(x, y) = f(ax + by, cx + dy),\ \text{где } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SU_2(\mathbb{C}).$$

(а) Докажите, что $\rho_n$ неприводимо.

(б) Разложите на неприводимые представления тензорное произведение представлений $\rho_n \otimes \rho_m$.