

1. Кольцо, поле, изоморфизм колец, подкольцо, делитель нуля, умножение матриц. Примеры: комплексные числа, поле из двух элементов, кольцо 2×2 матриц, кольцо эндоморфизмов плоскости, кватернионы, октавы.
2. Делимость в кольцах, область целостности, простые и неприводимые элементы, факториальное кольцо, наибольший общий делитель. Пример неприводимого, но не простого элемента. Примеры: кольцо целых, кольцо многочленов, кольцо формальных степенных рядов, кольцо $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$. Деление с остатком в кольце целых и в кольце многочленов над полем. Алгоритм Евклида.
3. Идеалы. Евклидовы кольца. Кольца главных идеалов. Факториальность колец главных идеалов. Китайская теорема об остатках для колец главных идеалов. Целые числа Гаусса и целые числа Гурвица. Связь с представимостью натуральных чисел в виде суммы $2x$ и $4x$ квадратов.
4. Прямая сумма колец, идемпотенты, китайская теорема об остатках для взаимно простых идеалов. Интерполяционная формула Лагранжа. Гомоморфизм колец, эндоморфизм кольца, ядро и образ гомоморфизма. Кольца вычетов. Конечные поля, число элементов в конечном поле.
5. Векторные пространства, подпространства, векторы. Примеры: координатное пространство, кольцо многочленов над полем, расширение поля, пространства над полем из двух элементов. Линейные операторы. Примеры: эндоморфизмы плоскости, умножение на многочлен и дифференцирование, умножение на элемент расширения. Линейные комбинации векторов, линейная независимость векторов.
6. Приведение матрицы к ступечатому виду элементарными преобразованиями строк. Ядро и образ линейного оператора. Базис и размерность. Классификация конечномерных векторных пространств. Интерполяционная формула Лагранжа и базисы в пространстве многочленов.
7. Сопряженное векторное пространство, двойственность. Ориентированный объём параллелепипеда. Определитель квадратной матрицы. Алгебра Грассмана.
8. Прямая сумма пространств. Сумма и пересечение подпространств. Симметрические и кососимметрические матрицы. Матрица линейного оператора. Собственные векторы и собственные числа оператора.
9. Теорема о существовании собственного вектора линейного оператора над полем комплексных чисел. Минимальный и характеристический многочлен линейного оператора. Теорема Гамильтона-Кэли.
10. Собственные и корневые подпространства линейного оператора. Резольвенты Лагранжа линейного оператора. Жорданова и фробениусова нормальные формы.
11. Группы, подгруппы, гомоморфизмы групп, действия групп на множествах, орбиты, стабилизаторы, коммутативные и циклические группы. Примеры: полная линейная группа GL_n , специальная линейная группа SL_n , группа вращений SO_n , симметрическая группа S_n , действие группы на себе слева, справа и сопряжениями.

- Теорема Кэли. Разложение перестановки в произведение непересекающихся циклов, знак перестановки.
- 12.** Связь между порядками стабилизатора и орбиты. Левые классы смежности по подгруппе, теорема Лагранжа. Цикличность группы простого порядка. Классы сопряжённости, централизаторы, уравнение числа классов. Нормальные подгруппы, факторгруппы.
- 13.** Теорема о гомоморфизме групп (нормальная подгруппа=ядро гомоморфизма). Пример: гомоморфизм из S_4 в S_3 , группа Клейна. Группа автоморфизмов циклической группы, связь с классификацией групп порядка pq , где $p < q$ простые. Задание группы образующими и соотношениями. Пример: свободная группа с двумя образующими. Теорема о строении конечно-порождённых абелевых групп.
- 14.** Приведение целочисленной матрицы к диагональному виду элементарными преобразованиями строк и столбцов. Степень расширения полей и приложения к классическим задачам о построении циркулем и линейкой. Группа автоморфизмов расширения.
- 15.** Билинейные формы. Скалярное произведение. Ортогональное дополнение. Квадратичные формы. Поляризация. Нормальный вид квадратичной формы, метод Лагранжа приведения формы к сумме квадратов, связь с ортогонализацией Грама-Шмидта. Метод Якоби приведения формы к сумме квадратов. Критерий Сильвестра.
- 16.** Операторы в евклидовых пространствах. Симметрические, кососимметрические и ортогональные операторы. Канонический вид симметрического и кососимметрического оператора; собственные значения. Канонический вид ортогонального оператора; собственные значения. Извлечение корня из положительного симметрического оператора. Полярное разложение.
- 17.** Полуторалинейные и эрмитовы формы. Эрмитово пространство. Неравенство Коши-Буняковского-Шварца. Эрмитовы, косоэрмитовы и унитарные операторы. Собственные значения, диагонализуемость. Полярное разложение оператора в эрмитовом пространстве.
- 18.** Комплексификация и о веществе. Вещественная и комплексная структуры. Продолжение эрмитовой формы. Кватернионы, связь с геометрией трехмерного пространства. Накрытие $SU_2(\mathbb{C}) \rightarrow SO_3(\mathbb{R})$.
- 19.** Максимальные и простые идеалы. Модули над кольцами: определение, примеры. Конечнопорожденные модули. Циклические модули. Аннулятор модуля. Свободные модули, ранг. Подмодули свободных модулей, их ранги.
- 20.** Теорема о взаимных базисах для модулей над кольцом главных идеалов. Каноническое и примарное разложение конечно порожденного модуля. Единственность примарного разложения. Следствия: теорема о конечно порожденных абелевых группах и теорема о жордановой нормальной форме.
- 21.** Полилинейные отображения. Тензорное произведение векторных пространств. Независимость от базиса, универсальное свойство. Примеры: комплексификация вещественных пространств, $\text{Hom}(V, W)$ и пространства полилинейных отображений как тензорные произведения пространств.
- 22.** Тензорная алгебра. Симметрические и внешние степени пространства. Симметрическая и внешняя алгебры.

- 23.** Симметризация и альтернирование. Разложимые поливекторы, грассманиан, вложение Плюккера. Задание грассманиана алгебраическими уравнениями.
- 24.** Кольцо многочленов от нескольких переменных и его свойства: соответствие между идеалами и алгебраическими подмножествами. Теорема Гильберта о нулях. Теорема Безу.
- 25.** Симметрические многочлены, элементарные симметрические функции, основная теорема о симметрических многочленах. Дискриминанты и результанты.
- 26.** Результант как определитель матрицы Сильвестра. Связь между квадратной матрицей с коэффициентами в кольце, матрицей алгебраических дополнений и определителем. Связь между результатом многочленов f и g и идеалом, порождённым f и g .
- 27.** Лемма Гаусса, критерий Эйзенштейна. Кольцо многочленов над факториальным кольцом факториально. Следствия: факториальность колец $\mathbb{Z}[x]$ и $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$.
- 28.** Поле частных области целостности, группа Гротендика полугруппы: поле рядов Лорана, группа виртуальных выпуклых тел. Целые алгебраические числа. Кольца целых квадратичных числовых полей.
- 29.** Идеалы в кольцах целых мнимых квадратичных полей. Пример: идеалы в $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$. Произведение идеалов. Группа классов идеалов и число классов. Разложение идеала (6) в $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ на простые идеалы.
- 30.** Существование и единственность разложения на простые идеалы в кольцах целых мнимых квадратичных полей. Квадратичные кольца, кольца целых числовых полей, дедекиндовы кольца.
- 31.** Представление группы, неприводимое представление, прямая сумма и тензорное произведение представлений. Примеры: тавтологическое представление симметрической группы, представления циклических групп, представления классических групп маленьких размерностей (исключительные гомоморфизмы). Теорема о классификации неприводимых представлений конечных групп. Характеры группы.
- 32.** Унитарные представления, инвариантные эрмитовы формы. Изоморфные представления. Существование инвариантной положительно определённой эрмитовой формы в представлении конечной группы. Инвариантные меры на S^1 , \mathbb{R}^* . Теорема Машке (над полем комплексных чисел).
- 33.** Двумерные комплексные представления конечных групп, классификация конечных подгрупп в $SO_3(\mathbb{R})$. Характер представления и его свойства. Таблица характеров для S_3 .