Алгебра II, осенний семестр 2014 г.

Листок 3. Срок сдачи 10 декабря.

факультет математики, НИУ ВШЭ

Решения нужно сдавать устно. Каждый пункт каждой задачи оценивается в один балл.

Задача 1. Пусть $\rho : G \to GL(V)$ — конечномерное комплексное представление конечной группы G. Докажите, что для любого элемента $g \in G$ оператор $\rho(g)$ диагонализуем.

Задача 2. (а) Докажите, что все неприводимые конечномерные комплексные представления абелевой группы одномерны.

(б) Докажите, что если у конечной группы все неприводимые конечномерные комплексные представления одномерны, то группа абелева.

(в) Останется ли утверждение пункта (б) верным, если убрать условие конечности группы?

Задача 3. Приведите пример такого представления конечной группы над полем конечной характеристики, что оно не раскладывается в прямую сумму неприводимых.

Задача 4. Пусть ρ — двумерное неприводимое представление группы S_3. Разложите $\rho^{\otimes n}$ в прямую сумму неприводимых.

Задача 5. Пусть $\rho : G \to GL_2(\mathbb{C})$ — двумерное представление конечной группы G. Докажите, что если одно из собственных чисел оператора $\rho(g)$ равно единице для любого $g \in G$, то ρ распадается в прямую сумму одномерных представлений.

Задача 6. (а) Найдите меру Хаара на $GL_2(\mathbb{R})$.

(б) Докажите, что форма $\frac{dx_2 dx_3 dx_4}{x_1}$ на трёхмерной сфере определяет меру Хаара на $SU_2(\mathbb{C})$. Как можно доопределить эту форму в точках, где $x_1 = 0$?

Задача 7. Определим представление ρ_n группы $SU_2(\mathbb{C})$ на пространстве $\mathbb{C}^n[x, y]$ однородных многочленов степени n от двух переменных

$$\rho_n(A)f(x, y) = f(ax + by, cx + dy), \text{ где } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SU_2(\mathbb{C}).$$

(а) Докажите, что ρ_n неприводимо.

(б) Разложите на неприводимые представления тензорное произведение представлений $\rho_n \otimes \rho_m$.

Задача 8 (Разложение Брюа)**.** Обозначим через B подгруппу всех верхнетреугольных матриц в GL_n. Докажите разложение Брюа

$$GL_n = \bigsqcup_{w \in S_n} BwB,$$

где перестановка w отождествялется со своей матрицей в тавтологическом представлении симметрической группы.

Задача 9 (Исключительные гомоморфизмы)**.** Постройте нетривиальные гомоморфизмы

(а) $SL_2(\mathbb{C}) \to SO_3(\mathbb{C})$, (б) $SL_2(\mathbb{C}) \otimes SL_2(\mathbb{C}) \to SO_4(\mathbb{C})$

(в) $Sp_4(\mathbb{C}) \to SO_5(\mathbb{C})$, (г) $SL_4(\mathbb{C}) \to SO_6(\mathbb{C})$.

Задача 10. Докажите, что гомоморфизмы, построенные в предыдущей задаче, являются двулистными накрытиями (в частности, сюрьективны).