

Задачи для семинара 11.

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

Задача 1. Пусть $\rho : G \rightarrow GL(V)$ — представление группы G . Обозначим через $S^2\rho$ его симметрический квадрат, то есть представление

$$S^2\rho : G \rightarrow GL(S^2V); \quad S^2\rho : g \mapsto S^2\rho(g).$$

Докажите следующее тождество, связывающее характеры представлений ρ и $S^2\rho$:

$$\chi_{S^2\rho}(g) = \frac{\chi_\rho(g)^2 + \chi_\rho(g^2)}{2}.$$

Задача 2. Напомним, что группа $Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$, где i, j и k — мнимые единицы в алгебре кватернионов, а групповая операция совпадает с умножением кватернионов. Докажите, что четырёхмерное представление группы Q_8 , заданное умножением на кватернионах, является неприводимым, если его рассматривать как вещественное представление.

Задача 3. (а) Выпишите таблицу характеров неприводимых комплексных представлений группы Q_8 .

(б) Изоморфны ли группы D_4 и Q_8 ?

(в) Соппадают ли таблицы характеров групп D_4 и Q_8 ?

Задача 4. (а) Вычислите характер трёхмерного представления группы S_4 , в котором S_4 действует вращениями куба.

(б) Разложите на неприводимые представления ограничения на A_4 всех неприводимых представлений группы S_4 .

(в) Разложите на неприводимые представления ограничения на S_3 всех неприводимых представлений группы S_4 .

Задача 5. Пусть группа G действует на конечном множестве X из n элементов. Рассмотрим n -мерное комплексное векторное пространство, и занумеруем какой-нибудь базис $\{e_x\}_{x \in X}$ в V элементами множества X . Определим *перестановочное представление* $\rho : G \rightarrow GL(V)$ следующим образом

$$\rho(g)e_x = e_{gx}.$$

Разложите на неприводимые представления перестановочное представление группы S_4 , действующей на

(а) гранях куба; (б) рёбрах куба; (в) вершинах куба.