

Задачи для семинара 13.

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

Задача 1. (а) Приведите пример приводимого представления группы \mathbb{Z} , которое не является прямой суммой неприводимых представлений.

(б) Приведите пример вещественного неприводимого двумерного представления группы $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

(в) Пусть G — группа изометрий куба, действующая на множестве вершин, а χ — характер соответствующего перестановочного представления. Найдите значение характера χ на вращении куба вокруг пространственной диагонали.

(г) Пусть группа G действует на множестве X , и ρ соответствующее перестановочное представление. Покажите, что $\text{tr}(\rho(g))$ равен числу неподвижных точек преобразования $g : X \rightarrow X$.

Задача 2. (а) Пусть U — неприводимое двумерное представление группы S_3 . Разложите $\text{Sym}^6(U)$ в прямую сумму неприводимых представлений.

(б) Пусть V — неприводимое трёхмерное представление группы A_4 . Разложите $\text{Sym}^2(V)$ в прямую сумму неприводимых представлений. Найдите характер представления $\text{Sym}^3 V$.

(в) Группа вращений тетраэдра действует на множестве рёбер тетраэдра. Найдите характер соответствующего перестановочного представления.

(г) Пусть W — неприводимое четырёхмерное представление группы S_5 . Докажите, что представление $\Lambda^2 W$ неприводимо и найдите его характер.

Задача 3. Предположим, что у группы G нет нетривиальных одномерных вещественных представлений. Докажите, что образ любого гомоморфизма $\rho : G \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{R})$ лежит в

$$\text{SL}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \text{GL}_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}.$$

Задача 4. Пусть $\varphi : G \rightarrow G$ — автоморфизм группы G , а $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ — представление.

(а) Проверьте, что $\rho \circ \varphi$ тоже является представлением группы G .

(б) Как связаны характеры представлений ρ и $\rho \circ \varphi$?

(в) Докажите, что если φ — внутренний автоморфизм, то представления ρ и $\rho \circ \varphi$ изоморфны. Верно ли обратное?

Задача 5. Докажите, что тавтологические представления групп

(а) $\text{GL}_n(\mathbb{C})$; (б) $O_n(\mathbb{R})$

неприводимы для всех n .