Алгебра II, осенний семестр 2014г.
**Решения домашнего задания 7.**
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

**Задача 1.** Найдите группу движений плоскости, сохраняющих букву H.

**Решение:** Пусть $A$ точка пересечения горизонтального отрезка с левым вертикальным отрезком, а точка $B$ с правым. При действии группы движений точка $A$ может перейти либо в себя, либо в $B$. После того как образ точки $A$ зафиксирован, мы можем выбрать в какой из концов соответствующего вертикального отрезка перейдет верхний конец левого вертикального отрезка. После этого мы фиксируем образ оставшихся двух отрезков, выходящих из $A$. Таким образом, мы получили четыре возможности, покажем что все они реализуются. Рассмотрим симметрию относительно горизонтального отрезка, центральную симметрию, симметрию относительно вертикальной прямой проходящей через центр и тождественное преобразование. Все они различны, сохраняют H и имеют порядок 2. По предыдущему рассуждению больше элементов в группе нет, значит это $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

**Задача 2.** Найдите группу вращений трёхмерного пространства, сохраняющую параллелепипед

$$\Pi = \{-1 \leq x_1 \leq 1\ ,\ -1 \leq x_2 \leq 1\ ,\ -2 \leq x_3 \leq 2\}.$$

**Решение:** Пусть мы перевели одну наперед заданную вершину в любую другую, заметим, что после этого образ длинного ребра однозначно определен длиной, а образ коротких после этого ориентацией (так же и образы граней, а значит всего параллелипипеда). Значит образ вершины однозначно задает вращение, значит порядок не больше 8. Теперь заметим, что мы имеем в нашей группе две образующих. Одна из них это поворот квадратного сечения и имеет порядок 4, а вторая это вращение, меняющее местами квадратные грани, она имеет порядок 2. Также заметим, что если спроецировать все вершины на плоскость $x_3 = 0$, то мы получим квадрат, на котором элемент порядка 4 будет действовать поворотом, а порядка 2 - симметрией относительно вертикальной оси. Поэтому наша группа изоморфна группе симметрий квадрата, т.е. $D_4$.

**Задача 3.** Пусть $G$ — группа вращений куба в трёхмерном пространстве. Найдите стабилизатор диагонали, соединяющей противоположные вершины, и выпишите матрицы всех элементов стабилизатора в каком-нибудь базисе.

**Решение:** Как известно группа движений куба это $S_4$, причем она действует перестановками на главные диагонали куба. Поэтому стабилизатор диагонали это $S_3$. Теперь поместим центр координат в центр куба. Выберем базис вдоль диагоналей куба, не совпадающих с сохраняющейся диагональю. Тогда наши преобразования отвечают перестановкам базисных векторов, причём при нечётной перестановке базисные векторы не просто переставляются, а ещё меняют знак. Получаем:

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0&0&-1\\0&-1&0\\-1&0&0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0&-1&0\\-1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

**Задача 4.** Пусть симметрическая группа $S_n$ действует на $\mathbb{R}^n$ перестановкой базисных векторов. Найдите все инвариантные подпространства в $\mathbb{R}^n$ относительно этого действия. (Подпространство называется *инвариантным*, если оно переходит в себя при действии всех элементов группы).

**Решение:** Очевидно, что пространство натянутое на $(1, 1, \dots, 1)$ инвариантно относительно действия группы. Рассмотрим его ортогонал, он тоже инвариантен, докажем что он не содержит инвариантных подпространств. Возьмем ненулевой вектор $v$ в этом пространстве. У него есть две разные координаты $i, j$. Рассмотрим вектор вида $\sigma_{ij}v - v$, где $\sigma_{ij}$ - транспозиция элементов $i, j$. Заметим, что на все координаты вектора, кроме этих двух транспозиция действует тривиально, значит он имеет ненулевые координаты только в этих двух местах (ненулевые так как они не были равны). Выберем в ортогонале базис в виде $e_1 - e_2, e_2 - e_3, \dots, e_{n-1} - e_n$. Тогда получившийся вектор $\sigma_{ij}v - v$ можно транспозициями привести к виду, где он будет пропорционален любому из базисных, значит линейная оболочка его орбиты — это все пространство, что и требовалось.

**Задача 5.** Пусть $G$ — конечная группа, состоящая из поворотов плоскости относительно начала координат. Докажите, что $G$ — циклическая.

**Решение:** Любой поворот можно рассматривать как элемент отрезка $[0,1]$ (делением угла поворота на 2 $\pi$). Так как группа конечна мы можем выбрать минимальный элемент $a$. Если $a$ иррационально, его порядок бесконечен, что невозможно в конечной группе. Если оно рационально, вида $\frac{p}{q}$, где $(p,q)=1$ и $p\neq 1$, то существуют натуральные $m$ и $n$ такие, что $\frac{pm}{q}-n=\frac{1}{q}$. Действительно, это утверждение эквивалентно взаимной простоте $p$ и $q$. Но тогда мы имеем внутри группы элемент меньше минимального. Значит минимальный элемент имеет вид $\frac{1}{p}$. И группа содержит порожденную им циклическую подгруппу. Пусть существует элемент, который в ней не лежит, тогда он лежит в одном из $p$ отрезков, на которые разделила циклическая подгруппа отрезок $[0,1]$, но тогда вычитая нужное количество раз $\frac{1}{p}$, мы попадем в отрезок $[0,\frac{1}{p}]$ и получим элемент меньше минимального. Противоречие.