Алгебра II, осенний семестр 2014 г.

Решение домашнего задания 10.

факультет математики, НИУ ВШЭ

Задача 1. Пусть $\rho : G \to GL(V)$ — представление группы G. Обозначим через $\Lambda^2\rho$ его внешний квадрат, то есть представление

$$\Lambda^2\rho : G \to GL(\Lambda^2 V); \quad \Lambda^2\rho : g \mapsto \Lambda^2\rho(g).$$

Докажите следующее тождество, связывающее характеры представлений ρ и $\Lambda^2\rho$:

$$\chi_{\Lambda^2\rho}(g) = \frac{\chi_\rho(g)^2 - \chi_\rho(g^2)}{2}.$$

Решение. Пусть диагональные элементы оператора $\rho(g)$ в базисе e_i равны λ_i, причем базис выбран таким образом, чтобы матрица оператора имела верхнетреугольный вид. Тогда диагональные элементы внешнего квадрата оператора в базисе $e_i \wedge e_j$, $i < j$ равны соответственно $\lambda_i\lambda_j$. Поэтому его след равен:

$$\chi_{\Lambda^2\rho}(g) = \sum_{i<j} \lambda_i\lambda_j = \frac{(\sum_i \lambda_i)^2 - \sum_i \lambda_i^2}{2} = \frac{\chi_\rho(g)^2 - \chi_\rho(g^2)}{2}.$$

Задача 2. Выпишите таблицу характеров неприводимых комплексных представлений группы C_5.

Решение. Мы можем перевести образующую циклической группы в любой корень из единицы пятой степени. Это задает всевозможные представления циклической группы. Так как порядок группы равен пяти, они не изоморфны. Так как группа абелева, каждый элемент представляет свой класс сопряженности. Поэтому таблица такова ($\eta = e^{\frac{2\pi i}{5}}$):

	$\{e\}$	$\{a\}$	$\{a^2\}$	$\{a^3\}$	$\{a^4\}$
$\chi_1^{C_5}$	1	1	1	1	1
$\chi_\eta^{C_5}$	1	η	η^2	η^3	η^4
$\chi_{\eta^2}^{C_5}$	1	η^2	η^4	η	η^3
$\chi_{\eta^3}^{C_5}$	1	η^3	η	η^4	η^2
$\chi_{\eta^4}^{C_5}$	1	η^4	η^3	η^2	η

Задача 3. Разложите на неприводимые четырёхмерное комплексное представление группы Q_8, заданное умножением на кватернионах.

Решение. Легко заметить, что у данной группы 5 классов сопряженности

$$\{1\}, \{-1\}, \{i, -i\}, \{j, -j\}, \{k, -k\}.$$

Имеется тривиальное представление, три одномерных представления, получающиеся после факторизции по подгруппам, порожденным тремя последними классами сопряженности, и одно двумерное неприводимое представление действиями на $\mathbb{H} \simeq \mathbb{C}^2$ (то есть $\mathbb{H}$ рассматривается как двумерное комплексное пространство с базисом $\{1, j\}$). Таблица характеров такова:

	$\{1\}$	$\{-1\}$	$\{i,-i\}$	$\{j,-j\}$	$\{k,-k\}$
$\chi_1^{Q_8}$	1	1	1	1	1
$\chi_i^{Q_8}$	1	1	1	-1	-1
$\chi_j^{Q_8}$	1	1	-1	1	-1
$\chi_k^{Q_8}$	1	1	-1	-1	1
ρ^{Q_8}	2	-2	0	0	0

Теперь запишем характер представления на кватернионах:

	$\{1\}$	$\{-1\}$	$\{i,-i\}$	$\{j,-j\}$	$\{k,-k\}$
q	4	-4	0	0	0

Из таблицы видно, что $q = 2\rho^{Q_8}$, а значит, представление на кватернионах распадается в прямую сумму двух двумерных представлений.

Задача 4. Выпишите таблицу характеров неприводимых комплексных представлений группы D_5.

Решение. D_5 имеет два неизоморфных двумерных неприводимых представления: одно реализуется симметриями пятиугольника, а второе переводит образующую подгруппы C_5 в поворот на $\frac{4\pi}{5}$. Также мы имеем тривиальное представление и знаковое. Больше представлений нет, так как порядок группы равен 10. Отсюда мы имеем 4 класса сопряженности $\{e\}, \{a, a^4\}, \{a^2, a^3\}, \{b, ba, ba^2, ba^3, ba^4\}$, где a - образующая поворота, а b — симметрия. Реализация двумерных представлений:

$$\rho_1(a) = \begin{pmatrix} e^{\frac{2\pi i}{5}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{-2\pi i}{5}} \end{pmatrix}$$

$$\rho_1(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rho_2(a) = \begin{pmatrix} e^{\frac{4\pi i}{5}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{-4\pi i}{5}} \end{pmatrix}$$

$$\rho_2(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Таблица характеров:

	$\{e\}$	$\{a, a^4\}$	$\{a^2, a^3\}$	$\{b, ba, ba^2, ba^3, ba^4\}$
$\chi_1^{D_5}$	1	1	1	1
$\chi_{-1}^{D_5}$	1	1	1	-1
$\rho_1^{D_5}$	2	$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$	$\frac{-\sqrt{5}-1}{2}$	0
$\rho_2^{D_5}$	2	$\frac{-\sqrt{5}-1}{2}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$	0

Задача 5. Разложите на неприводимые представления ограничения на C_5 всех неприводимых комплексных представлений группы D_5.

Решение. Представления $\chi_1^{D_5}$ и $\chi_{-1}^{D_5}$, очевидно, ограничиваются на тривиальное представление в C_5.

Справедливы следующие равенства на характеры:

$$\rho_1^{D_5}|_{C_5} = \chi_\eta^{C_5} + \chi_{\eta^4}^{C_5}$$

$$\rho_2^{D_5}|_{C_5} = \chi_{\eta^2}^{C_5} + \chi_{\eta^3}^{C_5}$$

Их легко проверить, учитывая,что $\eta + \eta^4 = -\eta^2 - \eta^3 = 2\cos(\frac{2\pi}{5})$, Из равенств для характеров следует то, что ограничения двумерных представлений распадаются в сумму двух одномерных.