Алгебра II, осенний семестр 2014 г.

**Решение домашнего задания 8.**

**Задача 1.** Найдите все характеры группы $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

**Решение.** Заметим, что элемент $(1,0)$ имеет порядок два, поэтому может перейти в 1 или $-1$. А элемент $(0,1)$ имеет порядок 4 и может перейти в $1, i, -1, -i$. Поскольку группа абелева, все восемь пар вариантов реализуются.

**Задача 2.** Найдите число классов сопряжённости в группе $A_4$.

**Решение.** Классы сопряжённости в $S_4$ соответствуют типам разложения перестановок на непересекающиеся циклы. При этом чётные перестановки распадаются на следующие 3 типа: 3-циклы, пары транспозиций, единичный элемент. Покажем, что пары транспозиций образуют один класс сопряжённости в $A_4$. Действительно, $(1\ 3)(2\ 4){=}(1\ 3\ 4)(1\ 2)(3\ 4)(1\ 3\ 4)$, и $(1\ 4)(2\ 3){=}(1\ 4\ 3)(1\ 2)(3\ 4)(1\ 4\ 3)$. Теперь покажем, что 3-циклы распадаются в $A_4$ на два класса сопряжённости. Найдём порядок централизатора 3-цикла $(1\ 2\ 3)$ в $A_4$. Централизатор оставляет 4 на месте и состоит из чётных перестановок, а таких всего три. Поэтому класс сопряжённости 3-цикла содержит $\frac{12}{3} = 4$ элемента. То же рассуждение применимо к любому другому 3-циклу, в качестве которого можно взять 3-цикл, не сопряжённый к $(1\ 2\ 3)$. Всего 3-циклов восемь, поэтому они образуют ровно два класса сопряжённости в $A_4$. (В задаче это не требуется, но легко найти эти классы явно прямым вычислением: это $\{(1\ 2\ 3), (1\ 4\ 2), (1\ 3\ 4), (2\ 4\ 3)\}$ и $\{(1\ 3\ 2), (1\ 2\ 4), (2\ 3\ 4), (1\ 4\ 3)\}$).

Ответ: четыре класса сопряжённости.

$(\{e\}, \{(1\,2)(3\,4), (1\,3)(2\,4), (1\,4)(2\,3)\}, \{(1\,2\,3), (1\,4\,2), (1\,3\,4), (2\,4\,3)\}, \{(1\,3\,2), (1\,2\,4), (2\,3\,4), (1\,4\,3)\})$.

**Задача 3.** Определим представление группы $GL_2(\mathbb{C})$ на пространстве однородных многочленов от $x$, $y$ степени два:

$$\rho(A)f(x,y) = f(ax+by, cx+dy), \text{ где } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Выпишите матрицу оператора $\rho(A)$ в базисе $x^2$, $xy$, $y^2$.

**Решение.** Запишем действие на базисе:

$$\rho(A)x^2 = (ax+by)^2 = a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2$$

$$\rho(A)xy = (ax+by)(cx+dy) = acx^2 + (ad+bc)xy + bdy^2$$

$$\rho(A)y^2 = (cx+dy)^2 = c^2x^2 + 2cdxy + d^2y^2$$

Тогда матрица в базисе выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} a^2 & ac & c^2 \\ 2ab & ad+bc & 2cd \\ b^2 & bd & d^2 \end{pmatrix}$$

**Задача 4.** Постройте два неизоморфных неприводимых двумерных представления диэдральной группы $D_6$.

**Решение.** Группу $D_6$ можно представить в виде $\{\tau, \sigma | \sigma^6 = 1\ , \tau^2 = 1\ , \tau\sigma\tau = \sigma^{-1}\}$. Одно неприводимое двумерное представление — это представление в виде симметрий шестиугольника. Явное выражение в матрицах

$$\sigma \mapsto \begin{pmatrix} e^{\frac{\pi i}{3}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{-\pi i}{3}} \end{pmatrix}$$

$$\tau \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Второе может быть получено следующим образом. Возьмем подгруппу порожденную поворотом на 180 градусов $\sigma^3$, она, очевидно, нормальна, так как в представлении является скалярной матрицей $-\mathrm{Id}$. Мы можем взять по ней фактор, получим группу из 6 элементов. После факторизации по $\sigma^3 = 1$, мы получим $D_3 \simeq S_3$. Тогда мы можем взять ее неприводимое двумерное представления на симметриях равностороннего треугольника. Явные выражения:

$$\sigma \mapsto \begin{pmatrix} e^{\frac{2\pi i}{3}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{-2\pi i}{3}} \end{pmatrix}$$

$$\tau \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Эти два представления неизоморфны, так как первое точное, а второе нет.

**Задача 5.** Докажите, что у любой конечной группы есть точное конечномерное комплексное представление. (Представление $\rho : G \to GL(V)$ называется *точным*, если ядро гомоморфизма $\rho$ тривиально.)

**Решение.** Рассмотрим вложение $G \hookrightarrow S_{|G|}$, которое получается действием группы на себе левыми сдвигами (она переводит элементы в элементы, т.е. является их перестановкой). Но у нас есть точное представление $S_n$ в качестве перестановок вершин симплекса, поэтому мы имеем сквозное отображение

$$G \hookrightarrow S_{|G|} \hookrightarrow GL_{|G|-1}(\mathbb{C}),$$

которое также инъективно вследствие инъективности обоих отображений.