Алгебра II, осенний семестр 2014 г.

Решение домашнего задания 9.

Задача 1. Классифицируйте все неприводимые представления группы $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Решение:

Так как группа $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ абелева, то все неприводимые представления у нее одномерны. Действительно, домножение на любой элемент g будет автоморфизмом представления, как и домножение на $g-\lambda Id$, но если λ собственный (такой можно найти), то есть ядро, а значит отображение нулевое. Т.е. любой элемент действует растяжением, т.е. любой вектор инвариантен, т.е. представление одномерно. А всего неприводимых представлений тогда n^2, которые несложно указать. А именно, $(a,b)\mapsto e^{\frac{i2\pi(ka+lb)}{n}}$, где k,l из $\{0,...,(n-1)\}$

Задача 2. Выпишите таблицу характеров всех неприводимых представлений группы $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Решение:

Аналогично первой задаче получаем четыре представления, характеры у которых очевидны, т.к. это все умножения на $+1$ и -1. Итого получаем

$$\begin{pmatrix} - & (0,0) & (0,1) & (1,0) & (1,1)\\ (0,0) & 1 & 1 & 1 & 1\\ (0,1) & 1 & -1 & 1 & -1\\ (1,0) & 1 & 1 & -1 & -1\\ (1,1) & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Задача 3. Докажите, что все неприводимые двумерные представления группы D_4 изоморфны.

Решение 1 (честное): Пусть ρ — неприводимое двумерное представление группы D_4. Можно сразу считать, что ρ унитарно. Заметим, что оно должно быть точным, потому что все факторгруппы D_4 по собственным нормальным подгруппам являются абелевыми, то есть не имеют неприводимых неодномерных представлений. Напомним, что D_4 задаётся образующими σ и τ с соотношениями $\sigma^2=\tau^4=\sigma\tau\sigma\tau=1$. Из первого соотношения следует, что собственные значения оператора $\rho(\sigma)$ могут быть равны только ±1. Так как ρ непривидомо, собственные значения не могут совпадать (иначе $\rho(\sigma)$ был бы скалярным оператором и коммутировал бы с $\rho(\tau)$, в частности, у них был бы общий собственный вектор), поэтому одно равно 1, а второе -1. Пусть v_1, v_2 — ортонормальный базис из собственных векторов оператора $\rho(\sigma)$ с собственными значениями 1 и -1, соответственно. Найдём в этом базисе коэффициенты матрицы

$$\rho(\tau)=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}.$$

Заметим, что $\det(\rho(\tau))=\pm1$, так как $1=\det(\sigma\tau\sigma\tau)=\det(\rho(\sigma))^2\det(\rho(\tau))^2=\det(\rho(\tau))^2$. Применяя третье соотношение, получаем

$$av_1+cv_2=\rho(\tau)(v_1)=\rho(\tau)\rho(\sigma)(v_1)=\rho(\sigma)\rho(\tau)^{-1}(v_1)=\pm\rho(\sigma)(dv_1-cv_2)=\pm(dv_1+cv_2),$$

откуда $a=d$, если $\det(\rho(\tau))=1$, и $c=0$, если $\det(\rho(\tau))=-1$. Второй случай невозможен, так как тогда и $b=0$ из унитарности $\rho(\tau)$, что противоречит неприводимости представления. Поэтому $a=d$ и $ad-bc=1$. Из второго соотношения имеем

$\rho(\tau)^2 = \rho(\tau)^{-2}$, то есть
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & a \end{pmatrix}^2,$$
откуда $2ab = -2ab$ и $2ac = -2ac$. Поэтому либо $b = c = 0$, либо $a = 0$. Первый случай невозможен, так как ρ неприводимо, поэтому $a = 0$, и $-bc = \det(\rho(\tau)) = 1$, и $b\bar{b} = c\bar{c}$ из унитарности $\rho(\tau)$. Домножая v_1 на b, можно считать, что $b = -c = 1$. Отсюда в базисе $\{bv_1, v_2\}$ оператор $\rho(\tau)$ — это поворот на $\frac{\pi}{2}$, а $\rho(\sigma)$ — отражение. Следовательно, ρ изоморфно представлению группы D_4 как группы симметрий квадрата.

Решение 2 (научное):

Сумма квадратов размерностей различных неприводимых представлений равна количеству элементов в группе. Но в D_4 всего 8 элементов, при этом есть тривиальное одномерное представление. Итого получаем, что больше одного двумерного представления быть не может, т.к. иначе $4 + 4 > 7$.

Задача 4. Выпишите таблицу характеров всех неприводимых одномерных и двумерных представлений группы D_4.

Решение:

Группа D_4 порождается элементами a, b с соотношениями $a^4 = 1, b^2 = 1, ab = ba^{-1}$. Тогда видно одно двумерное представление
$$a \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} b \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
и соответственно четыре одномерных (это все, т.к. $1 + 1 + 1 + 1 + 4 = 8$)

$(a \mapsto 1, b \mapsto 1)$,
$(a \mapsto 1, b \mapsto -1)$,
$(a \mapsto -1, b \mapsto 1)$,
$(a \mapsto -1, b \mapsto -1)$.

Соответственно, таблица характеров имеет вид
$$\begin{pmatrix} - & e & a^2 & a, a^3 & b, a^2b & ab, a^3b \\ 2\dim & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ (0,0) & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ (1,0) & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ (0,1) & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ (1,1) & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Задача 5. Докажите, что у группы D_n нет неприводимых представлений размерности выше два.

Решение:

Обозначения, как в предыдущей задаче, но теперь $a^n = 1$. Пусть v собственный вектор оператора a, положим $w = b(v)$. Тогда утверждается, что $\langle v, w \rangle$ инвариантное подпространство. Действительно, надо проверить, что его сохраняют a, b. Но $a(v) = \lambda v, a(w) = a(b(v)) = (ab)(v) = b(a^{-1}(v)) = b(\lambda^{-1} v) = \lambda^{-1} w, b(v) = w, b(w) = b(b(v)) = v$. Значит, в любом представлении есть инвариантное двумерное подпредставление, т.е. неприводимые представления имеют размерность не выше двух.