Алгебра II, весенний семестр 2015 г.

Задачи для семинара 1.

факультет математики, НИУ ВШЭ

Задача 1. Найдите степень расширения, полученного присоединением к полю $\mathbb{Q}$ всех корней многочлена

(а) x^3-2;

(б) x^4-2;

(в) x^p-a, где p простое число, и $a\in\mathbb{Q}$ не является p-той степенью.

Задача 2. (а) Пусть α — вещественный кубический корень из 2. Найдите минимальный многочлен над $\mathbb{Q}$ для $1+\alpha^2$ (=ненулевой многочлен минимальной степени с рациональными коэффициентами, корнем которого является $1+\alpha^2$).

(б) Найдите явно обратный элемент к $\alpha^2+\alpha+1$, представив его в виде $a+b\alpha+c\alpha^2$, где $a,b,c\in\mathbb{Q}$.

Задача 3. (а) Найдите минимальный многочлен над $\mathbb{Q}$ для $\sqrt{3}+\sqrt{5}$.

(б) Найдите минимальный многочлен над $\mathbb{Q}(\sqrt{10})$ для $\sqrt{3}+\sqrt{5}$.

Задача 4. (а) Пусть R — область целостности, содержащая поле $\mathbb{F}$ в качестве подкольца. Докажите, что если R конечномерно как векторное пространство над $\mathbb{F}$, то R является полем.

(б) Пусть $\mathbb{F}\subset\mathbb{C}$ подполе, не содержащееся в $\mathbb{R}$. Докажите, что $\mathbb{F}$ всюду плотно в $\mathbb{C}$.

Задача 5. Пусть $\beta=\zeta\sqrt[3]{2}$, где $\zeta=e^{\frac{2\pi i}{3}}$. Докажите, что -1 нельзя представить как сумму квадратов в поле $\mathbb{Q}(\beta)$.