

Задачи для семинара 2.

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

Задача 1. Найдите все $n \leq 16$, такие что правильный n -угольник можно построить циркулем и линейкой.

Задача 2. Пусть $\eta_n := e^{\frac{2\pi i}{n}}$ — первообразный корень степени n из единицы.

- (а) Найдите минимальный многочлен для η_n над \mathbb{Q} для всех $n \leq 16$.
- (б) Найдите минимальный многочлен над $\mathbb{Q}(\eta_3)$ для η_6 и η_9 .
- (в) Найдите минимальный многочлен для η_p над \mathbb{Q} для всех простых p .

Задача 3. (а) Пусть α и β комплексные числа, причём $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\beta) : \mathbb{Q}] = 3$. Чему может быть равна степень $[\mathbb{Q}(\alpha, \beta) : \mathbb{Q}]$?

(б) Докажите, что поля $\mathbb{Q}(e)$ и $\mathbb{Q}(\pi)$ изоморфны. Можно использовать без доказательства, что e и π — трансцендентные числа.

Задача 4. (а) Докажите, что задача об удвоении куба неразрешима с помощью циркуля и линейки.

(б) Можно ли построить корни многочлена $x^4 + x - 5$ с помощью циркуля и линейки?

Задача 5. Назовём *парабольной плоскостью* плоскость, на которой нарисована парабола. Докажите, что на парабольной плоскости можно построить с помощью циркуля и линейки:

(а) ось симметрии параболы;

Указание: Сначала докажите, что если окружность пересекает параболу в четырёх точках, то центр тяжести этих точек лежит на оси параболы.

(б) правильный семиугольник;

(в) правильный девятиугольник.

(г) Докажите, что любой угол на парабольной плоскости можно поделить на три равные части.

(д) Докажите, что на парабольной плоскости можно построить корень любого кубического многочлена, если его коэффициенты уже построены.