Алгебра II, весенний семестр 2015 г.

Задачи для семинара 4.

факультет математики, НИУ ВШЭ

Задача 1. Найдите группу автоморфизмов расширения
(а) $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$;
(б) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$;
(в) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$.

Задача 2. Найдите группу автоморфизмов расширения, полученного присоединением к полю $\mathbb{Q}$ всех корней многочлена
(а) x^2-2;
(б) x^3-2;
(в) x^4-2;
(г) x^p-a, где p простое число, и $a \in \mathbb{Q}$ не является p-той степенью;
(д) x^n-1.

Задача 3. (а) Найдите группу автоморфизмов расширения, полученного присоединением к полю $\mathbb{Q}$ всех корней многочлена

$$x^3+3x+1.$$

(б) Найдите группу автоморфизмов расширения, полученного присоединением к полю $\mathbb{Q}$ всех корней многочлена

$$x^3+px+q,$$

где $p, q \in \mathbb{Q}$.

Задача 4. Пусть $f(x) = x^4+px^2+q$ — биквадратный многочлен с рациональными коэффициентами.
(а) Докажите, что группа автоморфизмов расширения, полученного присоединением к полю $\mathbb{Q}$ всех корней многочлена f, содержится в группе диэдра D_4.
(б) Все ли подгруппы группы D_4 можно получить таким образом?

Задача 5. Пусть f — многочлен степени n с рациональными коэффициентами; $x_1, \ldots, x_n$ — его комплексные корни. Известно, что $x_1+x_2=x_3$, но между другими корнями такого соотношения нет (то есть, равенство $x_i+x_j=x_k$ имеет место только при $k=3$ и $\{i,j\}=\{1,2\}$). Докажите, что $x_3 \in \mathbb{Q}$, и x_1 и x_2 являются корнями квадратного многочлена с рациональными коэффициентами.