

Задачи для семинара 3.

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

Через η_n обозначается первообразный корень степени n из единицы.

Задача 1. (а) Найдите образующую циклической группы $(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})^*$.

(б) Найдите явно подполе степени 3 над \mathbb{Q} в поле $\mathbb{Q}(\eta_{13})$.

Задача 2. (а) Найдите образующую циклической группы $(\mathbb{Z}/17\mathbb{Z})^*$.

(б) Пусть $\eta = \eta_{17}$. Найдите явно последовательность квадратных корней, которые порождают поле $\mathbb{Q}(\eta + \eta^{16})$ над \mathbb{Q} (то есть числа $a_i \in K_i$ в башне квадратичных расширений $\mathbb{Q} = K_0 \subset K_1 := \mathbb{Q}(\sqrt{a_0}) \subset K_2 := K_1(\sqrt{a_1}) \subset K_2(\sqrt{a_2}) = \mathbb{Q}(\eta + \eta^{16})$).

(в) Выразите в радикалах $\cos \frac{2\pi}{17}$.

Задача 3. Пусть $\eta = \eta_7$. Найдите степени следующих элементов над \mathbb{Q} .

(а) $\eta + \eta^5$; (б) $\eta^3 + \eta^4$; (в) $\eta^3 + \eta^5 + \eta^6$.

Задача 4. Пусть $\eta = \eta_{11}$.

(а) Докажите, что число $\alpha = \eta + \eta^3 + \eta^4 + \eta^5 + \eta^9$ порождает поле степени 2 над \mathbb{Q} , и найдите минимальный многочлен для α над \mathbb{Q} .

(б) Найдите число, порождающее подполе степени 5 над \mathbb{Q} в $\mathbb{Q}(\eta)$, и найдите его минимальный многочлен над \mathbb{Q} .

Задача 5. Пусть p — простое число, и $\eta = \eta_p$. Обозначим через a образующую мультипликативной группы $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$.

(а) Найдите явно коэффициенты квадратного уравнения над \mathbb{Q} , которому удовлетворяет число

$$\eta^{a^0} + \eta^{a^2} + \eta^{a^4} + \dots + \eta^{a^{p-3}}.$$

(б) Предположим, что $p \equiv 1 \pmod{3}$. Найдите коэффициенты кубического уравнения над \mathbb{Q} , которому удовлетворяет число

$$\eta^{a^0} + \eta^{a^3} + \eta^{a^6} + \dots + \eta^{a^{p-4}}.$$