Олимпиада для студентов и выпускников вузов — 2014 г.
Направление «Математика»

Критерии. Полный балл за каждую из задач составляет 20 баллов. В общей части и блоке "математика" мы руководствовались следующими критериями прверки.

- $+$ **(100% полного балла.)** Полное верное решение с правильным ответом.
- $\pm$ **(75 % полного балла.)** Правильный ход решения с легко устранимой ошибкой или пробелом.
- $\mp$ **(25% полного балла.)** Ошибочное или незавершённое решение, содержащее продуктивные идеи.
- $-$ **(0% полного балла.)** Ошибочное решение без существенных продвижений в задаче.

Дополнительные критерии по отдельным задачам указаны после решения. Участники, набравшие 100 баллов объявляются абсолютными победителями; баллы, набранные сверх 100, не учитываются в окончательном результате.

I. ОБЩАЯ ЧАСТЬ

1. Пусть векторное пространство V над полем $\mathbb{R}$ представлено в виде объединения последовательности подпространств V_n, $n \in \mathbb{N}$ (не обязательно вложенных друг в друга). Докажите, что всякое конечномерное подпространство V содержится в V_n для некоторого n.

1. Assume that a vector space V over the field $\mathbb{R}$ is a union of a sequence of subspaces V_n, $n \in \mathbb{N}$ (not necessarily included into each other). Show that any finite-dimensional subspace of V is contained in V_n for some n.

Решение. Назовём *исключительным* такое конечномерное подпространство $U \subset V$, что $U \cap V_n$ является собственным подпространством U для всех n. Докажем индукцией по размерности U, что таких пространств в рамках условия задачи не существует.

Если $\dim(U) = 1$, то U порождено одним вектором u, который содержится в V_n для некоторого n, значит и всё U сожержится в V_n.

Пусть утверждение доказано вплоть до размерности n и $\dim(U) = n + 1$. Выберем гиперплоскость $H \subset U$ (проходящую через начало координат), не содержащуюся ни в каком из подпространств $U \cap V_n$. Она существует, так как мощность множества гиперплоскостей — континуум, а каждое из счётного набора подпространств $U \cap V_n$ содержит не более одной гиперплоскости (только само себя, если оно — гиперплоскость). Тогда H — исключительное подпространство размерности n и мы пришли к противоречию.

Другое решение: заметим, что исключительное подпространство U — полное метрическое пространство по любой из норм на U, и что $U \cap V_n$ — нигде не плотные множества. Тогда по теореме Бэра U не может быть их объединиением.

Критерии.

- $\pm$ **(15 баллов.)** Решение в предположении о конечномерности самого V.

2. Напомним, что для векторного поля $v = (v_1, v_2, v_3)$ в $\mathbb{R}^3$ его *дивергенция* определяется как функция $\operatorname{div}(v) = \partial v_1/\partial x_1 + \partial v_2/\partial x_2 + \partial v_3/\partial x_3$.

Пусть в $\mathbb{R}^3$ даны гладкое векторное поле v и гладкая функция f. Докажите, что для каждой точки $\mathbb{R}^3$, в которой v не обращается в ноль, найдётся такая система координат в некоторой её окрестности U, что $\operatorname{div}(v) = f$ в U.

2. Recall that for a vector field $v = (v_1, v_2, v_3)$ in $\mathbb{R}^3$ its *divergence* is defined by $\operatorname{div}(v) = \partial v_1/\partial x_1 + \partial v_2/\partial x_2 + \partial v_3/\partial x_3$.

Suppose we are given a smooth vector filed v and a smooth function f in $\mathbb{R}^3$. Show that for any point in $\mathbb{R}^3$, where v does not vanish, there exists a coordinate system in some neighbourhood of it such that $\operatorname{div}(v) = f$ in U.

Решение. По теореме о выпрямлении мы можем добиться $v = (1, 0, 0)$ в некоторой системе координат (y_1, y_2, y_3) в окрестности точки p, в которой $v \neq 0$. В этой системе координат можем считать $p = (0, 0, 0)$.

Положим $x_1 = \rho(y_1, y_2, y_3)$, $x_2 = y_2$, $x_3 = y_3$ для функции 3 переменных ρ, у которой $\rho(0, 0, 0) = 0$, а $\frac{\partial\rho}{\partial y_1}(0, 0, 0) \neq 0$. Тогда

$$v = \frac{\partial}{\partial y_1} = \frac{\partial x_1}{\partial y_1}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial y_1}\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial x_3}{\partial y_1}\frac{\partial}{\partial x_3} = \frac{\partial\rho}{\partial y_1}\frac{\partial}{\partial x_1}.$$

Дивергенция v в системе координат (x_1, x_2, x_3) равна

$$\operatorname{div}(v) = \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial\rho}{\partial y_1} = \left(\frac{\partial\rho}{\partial y_1}\right)^{-1}\frac{\partial^2\rho}{\partial y_1^2}.$$

Приравнивая её к f, получаем следующее дифференциальное уравнение на функцию ρ:

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial y_1^2} = f(y_1, y_2, y_3)\frac{\partial\rho}{\partial y_1}.$$

Поскольку в уравнении участвуют только производные по y_1, это — обыкновенное дифференциальное уравнение, и мы можем применить теорему о существовании, единственности и гладкой зависимости решения от параметров (в данном случае y_2, y_3). В результате получаем окрестность I начала координат и решение $y_1 \mapsto \rho(y_1, y_2, y_3)$ на I с начальными условиями $\rho(0, y_2, y_3) = 0$, $\frac{\partial\rho}{\partial y_1}(0, y_2, y_3) = 1$, гладко зависящее от y_2, y_3.

Тем самым, $x_1 = \rho(y_1, y_2, y_3)$, $x_2 = y_2$, $x_3 = y_3$ — искомая система координат.

Критерии.

$\pm$ **(15 баллов.)** Ошибка в составлении уравнения на функцию ρ

$+/2$ **(10 баллов.)** Присутствует идея выпрямления векторного поля.

3. Докажите, что для всякого $R > 0$ найдётся такое $n \in \mathbb{N}$, что многочлен

$$1 + z + \frac{z^2}{2} + \dots + \frac{z^n}{n!}$$

не обращается в ноль в диске $|z| < R$, $z \in \mathbb{C}$.

3. Show that for any $R > 0$ there exists $n \in \mathbb{N}$ such that the polynomial

$$1 + z + \frac{z^2}{2} + \dots + \frac{z^n}{n!}$$

has no zeroes in the disc $|z| < R$, $z \in \mathbb{C}$.

Решение. Положим

$$P_n(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \dots + \frac{z^n}{n!}.$$

Заметим, что чило нулей (с учётнм кратности) P_n в диске $|z| < R$ выражается интегралом

$$I_n = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{P_n'(z)}{P_n(z)}dz$$

по окружности $|z| = R$. Поскольку $P_n(z)$ сходится к $\exp(z)$ равномерно на окружности $|z| = R$, интеграл I_n сходится к

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{\exp'(z)}{\exp(z)}dz = 0.$$

С другой стороны, I_n принимает целые значения. Значит, $I_n = 0$ начиная с некоторого n.

Критерии.

$\pm$ **(15 баллов.)** Используется равномерная сходимость ряда при доказанной поточечной сходимости.

$\mp$ **(5 баллов.)** Присутствует идея сведения задачи к отсутствию нулей экспоненты.

4. Докажите, что для любых вещественных $\varepsilon, \delta > 0$ найдётся такое $N \in \mathbb{N}$, что для $n > N$ вероятность того, что скалярное произведение двух равномерно распределённых независимых случайных векторов на единичной сфере в $\mathbb{R}^n$ больше ε, меньше δ.

4. Show that for any real numbers $\varepsilon, \delta > 0$ there exists $N \in \mathbb{N}$ such that for $n > N$ the probability, that the scalar product of two uniformly distributed independent random vectors on a unit sphere in $\mathbb{R}^n$ is greater than ε, is less than δ.

Решение. В силу симметрии можно считать, что первый вектор — это координатный вектор (1,0,0,. . . ,0), а второй равномерно распределен по сфере. Тем самым, задача сведена к поиску площади участка n-мерной сферы, заданного условием $x_1 > \varepsilon$.

Эта площадь выражается интегралом, легко сводящимся к одномерному (на самом деле, к значению бета-функции), который может быть оценен стандартными способами. Здесь же приведём решение, не требующее вычислений.

Пусть x_i – случайная величина равная i-той координате второго вектора, а событие A_i состоит в том что $x_i > \varepsilon$. Заметим что все события A_i имеют одну и ту же вероятность (т. к. мера Лебега на сфере инвариантна относительно перестановок координат).

Предположим, что вероятность A_1 не меньше δ, тогда и равная ей вероятность A_i не меньше δ. Значит, по принципу Дирихле с ненулевой вероятностью выполняются одновременно хотя бы $\lceil n\delta \rceil$ событий из набора $A_1, \dots, A_n$. Значит с ненулевой вероятностью $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geqslant \varepsilon^2 \lceil n\delta \rceil$ что ведет к противоречию с равенством $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$ при $n\delta > \frac{1}{\varepsilon^2}$ то есть при $n > \frac{1}{\varepsilon^2\delta}$. Значит за искомое N можно принять целую часть $\frac{1}{\varepsilon^2\delta}$.

Критерии.

$\pm$ **(15 баллов.)** Задача сведена к интегралу по отрезку, ошибка при его оценке.

$+/2$ **(10 баллов.)** Задача сведена к вычислению площади сегмента сферы, но нет существенных продвижений в её вычислении.

II. СПЕЦИАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

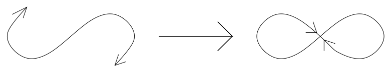
В соответствии со своим выбором программы магистерской подготовки выберите и выполните <u>только один</u> из следующих блоков заданий специальной части.

Блок 1. «Математика»

1. Постройте хаусдорфово топологическое пространство X, не гомеоморфное $\mathbb{R}$, для которого существует непрерывное биективное отображение $\mathbb{R} \to X$.

1. Give an example of a Hausdorff topological space X not homeomorphic to $\mathbb{R}$ such that there exists a continuous bijective map $\mathbb{R} \to X$.

Решение. Заметим, что $\mathbb{R}$ гомеоморфно интервалу. В качестве X возьмём "знак бесконечности" с топологией, индуцированной с плоскости, и отобразим в него интервал следующим способом:



При этом X хаусдорфово, то есть у каждой пары различных точек ести непересекающиеся открытые окрестности, поскольку это выполнено для плоскости, и ограничение соответствующих окрестностей на плоскости открыты в X по определению индуцированной топологии.

Критерии.

+. **(19 баллов.)** Правильный пример без доказательства хаусдорфовости.

2. Найдите
a) двузначное n,
b) трёхзначное n,
c) рекуррентную формулу для нахождения всех $n \in \mathbb{N}$,
для которых найдётся такое $m \in \mathbb{N}$, $1 < m < n$, что $1+2+\cdots+m = (m+1)+(m+2)+\cdots+n$.

2. Find a
a) two-digit integer n,
b) three-digit integer n,
c) a recurrence formula for finding all $n \in \mathbb{N}$
such that there exists $m \in \mathbb{N}$ with $1 < m < n$ and $1+2+\cdots+m = (m+1)+(m+2)+\cdots+n$.

Решение. Составим уравнение на m и n, суммируя арифметическую прогрессию: $2m(m+1) = n(n+1)$, преобразовав его, получим $2(2m+1)^2-(2n+1)^2 = 1$, то есть нам достаточно решить уравнение $x^2 - 2y^2 = -1$ (Уравнение Пелля) в нечётных положительных целых числах. При этом если (x, y) — целое решение, то x автоматически нечётно, поскольку нечёнта правая часть, а y нечётно, поскольку правая часть сравнима с -1 по модулю 4.

Пусть K — кольцо чисел вида $x + y\sqrt{2}$, где x и y — целые. Для $r = x + y\sqrt{2} \in K$ положим $N(r) = x^2 - 2y^2 \in \mathbb{Z}$. Тогда $N(r) = (x + y\sqrt{2})(x - y\sqrt{2})$, $N(r_1r_2) = N(r_1)N(r_2)$. Поэтому элементы K с $N(r) = 1$ обратимы по умножению, и для нахождения всех решений уравнения $N(r) = k$ достаточно найти все решения уравнения $N(r) = 1$ и одно решение исходного уравнения.

Элементы с $N(r) = 1$ представляют собой целые точки гиперболы $x^2 - 2y^2 = 1$ и образуют группу. Правая ветвь гиперболы — элементы с $x > 0$ образует подгруппу, внутри которой умножение на элементы $a + b\sqrt{2}$ с a, $b > 0$ увеличивает значение y, а при $a > 0$, $b < 0$ — уменьшает. Это говорит о том, что в подгруппе нет элементов конечного порядка, и элемент с минимальным положительным y её порождает, то есть наша подгруппа изоморфна $\mathbb{Z}$. Ясно, что таким порождающим элементом будет $3+2\sqrt{2}$, так как целого решения с $y = 1$ нет. Таким образом, все решения $x^2 - 2y^2 = 1$ в целых положительных числах получаются последовательным умножением $3 + 2\sqrt{2}$, что даёт рекуррентную формулу $x_{l+1} = 3x_l + 4y_l$, $y_{l+1} = 3y_l + 2x_l$ с начальными условиями $x_0 = 1$, $y_0 = 0$.

Наконец, целые положительные решения уравнения $x^2 - 2y^2 = -1$ получаются умножением частного решения с минимальным y на эти же элементы K, то есть они могут быть получены теми же рекуррентными соотношениями с начальными условиями $x_1 = 1$, $y_1 = 1$.

Осталось только вспомнить, что $x = 2n+1$, $y = 2m+1$, переписать эти же соотношения в виде
$$n_{k+1} = 3n_k + 4m_k + 3, \qquad m_{k+1} = 3m_k + 2n_k + 2, \qquad n_0 = m_0 = 0$$
и вычислить первые 4 решения: $n_1 = 3$, $m_1 = 2$; $n_2 = 20$, $m_2 = 14$; $n_3 = 119$, $m_3 = 84$; $n_4 = 696$, $m_4 = 492$.

Критерии. — **(2 балла.)** Составлено уравнение на m и n.

Блок 2. «Математическая физика»

1. На гладкой горизонтальной поверхности расположен клин массы M, наклонная грань которого образует угол α с горизонтом. На поверхности наклонной грани на высоте h от основания клина находится небольшое тело массы m. В начальный момент вся система находится в покое. Затем тело m начинает скользить вниз по наколонной грани клина под действием силы тяжести. Трение между телом и клином и между клином и горизонтальной поверхностью пренебрежимо мало. Определите:

а) Максимальную высоту относительно горизонтальной поверхности, на которую поднимется тело m после упругого удара об эту поверхность.

б) Расстояние, которое пролетит тело m между двумя последовательными ударами о горизонтальную поверхность.

Решение. При спуске тела m клин также придет в движение. Скорость его будет направлена вдоль горизонтальной поверхности. Обозначим символом v модуль скорости клина в момент, когда тело m достигнет его основания. В это же момент скорость самого тела m относительно неподвижной системы отсчета будет иметь две составляющие — горизонтальную u_x и вертикальную u_y. Направление горизонтальной оси неподвижной системы координат выберем так, чтобы компонента u_x была положительной: $u_x > 0$. При упругом ударе о гладкую поверхность компонента u_y поменяет знак, а компонента u_x не изменится. Эти компоненты скорости и определяют искомую высоту H подъема тела над горизонтальной поверхностью и дальность L полета между последовательными ударами о поверхность:
$$H = \frac{u_y^2}{2g}, \qquad L = \frac{2u_x|u_y|}{g},$$
где g — ускорение свободного падения.

Для нахождения трех неизвестных величин v, u_x и u_y воспользуемся двумя законами сохранения и кинематическим условием, отражающим факт скольжения тела m по наклонной поверхности клина. Соответствующие уравнения имеют вид:

(1) Закон сохранения импульса в горизонтальном направлении (так как проекции внешних сил на это направление равны нулю):
$$mu_x - Mv = 0.$$

(2) Закон сохранения полной механической энергии (так как диссипативные силы пренебрежимо малы):
$$\frac{Mv^2}{2} + \frac{m(u_x^2 + u_y^2)}{2} = mgh.$$

(3) В системе отсчета, связанной с клином (в ней клин покоится), скорость тела m направлена под углом α к горизонту — вдоль наклонной грани клина. Учитывая закон преобразования скорости при переходе в движущуюся систему отсчета, имеем:
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{|u_y|}{u_x + v}.$$

Решая приведенные три уравнения, получаем следующий промежуточный результат

$$u_x^2 = \frac{2gh\cos^2\alpha}{(1+\frac{m}{M})(1+\frac{m}{M}\sin^2\alpha)}, \quad u_y^2 = \frac{2gh(1+\frac{m}{M})\sin^2\alpha}{1+\frac{m}{M}\,\sin^2\alpha}, \quad v^2 = \frac{2gh\cos^2\alpha}{(1+\frac{M}{m})(\sin^2\alpha+\frac{M}{m})}.$$

Пользуясь этими формулами, получаем такие ответы для максимальной высоты подъема и дальности полета после удара о плоскость:

$$H = h\,\frac{(1+\frac{m}{M})\sin^2\alpha}{1+\frac{m}{M}\,\sin^2\alpha}, \qquad L = h\,\frac{2\sin 2\alpha}{1+\frac{m}{M}\sin^2\alpha}.$$

Полезно проверить эти ответы в очевидных предельных случаях очень тяжелого клина $M \gg m$, очень легкого клина $m \gg M$ и вертикального падения $\alpha \to \frac{\pi}{2}$.

Критерии. $\mp$ **(30% полного балла.)**Верно написан один или два закона сохранения с пониманием того, что скорость тела m относительно земли на подвижном клине не направлена под углом α к горизонту. Если решение основано на использовании динамических уравнений Ньютона: продемонстрировано понимание того, что тело m и клин M ускоряются в горизонтальном направлении проекцией силы реакции поверхности клина, которая не равна $mg\,\mathrm{tg}\alpha$.

$+/2$ **(50% полного балла.)** Верно написаны законы сохранения и кинематическое условие движения по поверхности клина. При динамическом способе решения: верно написаны все уравнения Ньютона на движение тела m и клина M.

$\pm$ **(80% полного балла.)** Верно найдены компоненты скорости тела m относительно земли.

$+$ **(100% полного балла.)** Задача решена в полном объеме — верно найдены дальность полета и высота подъема тела m.

2. Проводящей сфере с внешним радиусом R и внутренним радиусом r сообщен электрический заряд q. Сфера разрезана двумя взаимно перпендикулярными плоскостями, проходящими через ее центр, на четыре равные части. Определите:

а) Величину электростатической силы, которая действует на каждую из четырех частей.

б) Возможно ли удержать части сферы от разлета, поместив в ее центр точечный электрический заряд? Ответ необходимо обосновать и, в случае положительного ответа, найти величину требующегося точечного заряда.

Решение. **а)** Поскольку сфера проводящая, заряд q равномерно распределится по ее внешней поверхности с постоянной поверхностной плотностью

$$\sigma = \frac{q}{4\pi R^2}.$$

Выделим на поверхности сферы малый элемент площади dS и найдем величину модуля действующей на него электростатической силы dF. Из симметрии задачи очевидно, что направлена эта сила от центра сферы вдоль ее радиуса, проведенного к выбранному участку dS (сила отталкивания). Для величины dF можно, очевидно, записать следующее выражение

$$dF = \sigma dS\,E_0,$$

где σdS — заряд выбранного элемента dS, а E_0 — модуль напряженности поля, создаваемого распределенным зарядом сферы за исключением заряда элемента dS (сам на себя элемент dS не действует). Чтобы найти напряженность E_0, учтем, что модуль напряженности поля *вне* сферы в непосредственной близости от ее поверхности дается формулой

$$E = \kappa\frac{|q|}{R^2},$$

где коэффициент κ зависит от выдбранной системы единиц измерения ($\kappa = 1$ в системе СГСЭ и $\kappa = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ в системе СИ), тогда как *внутри* сферы поле всюду равно нулю. С внешней стороны сферы вблизи ее поверхности напряженность E дается суммой напряженности E_0 и напряженности E_1, создаваемой элементом dS:

$$E_0 + E_1 = E.$$

С внутренней стороны вблизи элемента dS вектор напряженности E_0 *сохраняет* направление (вдоль радиуса сферы от центра наружу), а вектор напряженности E_1 *меняет* свое направление на противоположное (вдоль радиуса сферы внутрь к ее центру). Поэтому, учитывая суммарное нулевое поле внутри сферы, имеем второе равенство:

$$E_0 - E_1 = 0.$$

Отсюда сразу получаем:

$$E_0 = \frac{1}{2}\,E = \kappa\frac{|q|}{2R^2}.$$

Теперь можно найти давление электростатических сил на внешнюю поверхность сферы:

$$p = \frac{dF}{dS} = \frac{1}{2}\,\sigma E = \frac{\kappa q^2}{8\pi R^4}.$$

Это давление одинаково в любой точке сферы. Теперь модуль полной силы, действующей на любую из четырех частей разрезанной сферической оболочки, можно найти, вычислив поверхностный интеграл:

$$F = pR^2\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\phi\sin\theta\cos(\frac{\pi}{4}-\phi) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\,pR^2.$$

Подставляя значение давления p получаем окончательный ответ:

$$F = \frac{\kappa q^2}{8\sqrt{2}R^2}.$$

б) Будем для определенности считать заряд $q > 0$. Поместим в центр сферической оболочки заряд противоположного знака $-Q < 0$. При этом произойдет перераспределение свободных зарядов в металле оболочки таким образом, чтобы суммарное электрическое поле в объеме металла равнялось бы нулю. В результате сложится такая конфигурация зарядов: на внутренней сфере радиуса r индуцируется положительный заряд Q, равномерно распределенный по поверхности с плотностью

$$\sigma' = \frac{Q}{4\pi r^2}.$$

На внешней поверхности оболочки появится соответствующий отрицательный индуцированный заряд $-Q$ и, с учетом исходного заряда q, поверхностная плотность заряда на внешней сфере станет равной

$$\sigma'' = \frac{q-Q}{4\pi R^2}.$$

В соответствии с решением пункта **а)**, наружный заряд обеспечит силу отталкивания

$$F_{\text{от}} = \frac{\kappa(q-Q)^2}{8\sqrt{2}R^2}.$$

Заряды на внутренней сфере, помимо взаимного отталкивания, будут притягиваться к точечному заряду $-Q$ с силой, вдвое превышающей силу их отталкивания (поскольку они взаимодействуют с полем E_Q точечного заряда $-Q$, а взаимное отталкивание обеспечивается полем $E_Q/2$). В итоге, на внутреннюю поверхность радиуса r каждой четвертинки сферической оболочки действует сила притяжения

$$F_{\text{пр}} = \frac{\kappa Q^2}{8\sqrt{2}r^2}.$$

Условие равновесия сферы $F_{\text{пр}} \geq F_{\text{от}}$ приводит к следующему соотношению на модуль Q отрицательного заряда, который нужно поместить в центр сферической оболочки:

$$Q \geq \frac{r}{R+r}\, q.$$

Интересно отметить, что удержать части сферической оболочки можно и *положительным* зарядом $Q_+ > 0$, помещенным в центр. В этом случае, заряд на внешней поверхности увеличится до $q + Q_+$ и сила отталкивания четвертинок возрастет до

$$F_{\text{от}} = \frac{\kappa (q+Q_+)^2}{8\sqrt{2}R^2}.$$

Однако сила притяжения индуцированных отрицательных зарядов на внутренней сфере r к центральному точечному заряду Q_+

$$F_{\text{пр}} = \frac{\kappa Q_+^2}{8\sqrt{2}r^2}$$

может, тем не менее, превзойти возросшую силу отталкивания (то есть влияние *меньшего* расстояния r отрицательных индуцированных зарядов до центрального точечного заряда Q_+ превзойдет влияние роста заряда на внешней поверхности оболочки). Условие равновесия $F_{\text{пр}} \geq F_{\text{от}}$ приводит в данном случае к ограничению

$$Q_+ \geq \frac{r}{R-r}\, q.$$

Видно, что с уменьшением толщины оболочки (то есть, при $r \to R$) удержать ее части от разлета этим способом становится все труднее — величина требующегося положительного заряда стремится к бесконечности.

Критерии. Пункт а).

- $\mp$ **(30% полного балла.)** Верно написаны выражения для напряженности поля сферического распределения зарядов, сделано утверждение, что заряды располагаются по поверхности сферы.
- $+/2$ **(50% полного балла.)** Определена напряженность поля, действующего на элементарный заряд поверхности сферы и выписана сила, действующая на элемент поверхности.
- $\pm$ **(80% полного балла.)** Верно выписан интеграл для вычисления силы взаимодействия.
- $+$ **(100% полного балла.)** Задача решена в полном объеме — верно найдено выражение для модуля силы отталкивания.

Пункт б).

- $\mp$ **(30% полного балла.)** Сделано заключение о перераспределении индуцированных зарядов и верно определена плотность заряда на всех поверхностях.
- $+/2$ **(50% полного балла.)** Определены силы отталкивания и притяжения, действующие на элементы поверхностей сферической оболочки.
- $\pm$ **(80% полного балла.)** Найдены полные силы притяжения и отталкивания, действующие на части сферической оболочки.
- $+$ **(100% полного балла.)** Задача решена в полном объеме — верно найдено неравенство для величины точечного заряда, удерживающего разрезанную оболочку в равновесии.