Алгебра II, весенний семестр 2015 г.

Задачи для семинара 5.

факультет математики, НИУ ВШЭ

Задача 1. Пусть $\alpha = \sqrt[3]{2}$ и $\beta = \alpha e^{\frac{2\pi i}{3}}$. Является ли

(а) $\theta = \alpha + \beta$;

(б) $\theta = \alpha - \beta$

примитивным элементом в расширении $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\alpha, \beta)$? В обоих пунктах найдите также минимальный многочлен для θ.

Задача 2. Для каких полей расширение $K \subset K(\sqrt[3]{2})$ нормально?

(а) $K = \mathbb{Q}$; (б) $K = \mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{3}})$; (в) $K = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.

Задача 3. (а) Пусть f — неприводимый многочлен ненулевой степени с коэффициентами в конечном поле. Докажите, что производная f' не может быть равна нулю как многочлен.

(б) Докажите, что все конечные расширения конечного поля сепарабельны.

Задача 4. (а) Пусть $G \subset \mathrm{Aut} K$ — подгруппа в группе автоморфизмов поля K. Докажите, что неподвижные элементы K^G образуют подполе в K (поле K^G называется *полем инвариантов*).

(б) Опишите подгруппу в группе автоморфизмов поля $\mathbb{C}(z)$, порождённую множеством автоморфизмов

$$\sigma(z) = -z, \quad \tau(z) = z^{-1}.$$

Опишите также поле инвариантов этой подгруппы.

(в) Тот же вопрос, что и в пункте (б), для множества

$$\sigma(z) = e^{\frac{2\pi i}{3}} z, \quad \tau(z) = z^{-1}.$$

Задача 5. (а) Покажите, что автоморфизмы

$$\sigma(z) = \frac{z+i}{z-i}, \quad \frac{i(z-1)}{z+1}$$

поля $\mathbb{C}(z)$ порождают подгруппу изоморфную A_4.

(б) Опишите поле инвариантов подгруппы из пункта (а).