

Домашнее задание 4. Срок сдачи 17 февраля.

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

Решения нужно сдавать в письменном виде и **обязательно указывать НОМЕР ДОМАШНЕГО ЗАДАНИЯ на титульном листе**. Пожалуйста, пишите разборчиво или набирайте в TeX.

Задача 1. Пусть $\alpha = \sqrt[3]{2}$ и $\beta = \alpha e^{\frac{2\pi i}{3}}$. Для всех $c \in \mathbb{Q}$ докажите, что $\alpha + c\beta$ является корнем многочлена шестой степени вида $x^6 + ax^3 + b$, где $a, b \in \mathbb{Q}$. При каких c этот многочлен неприводим?

Задача 2. Является ли расширение $K \subset K(\sqrt[6]{2})$ нормальным, если $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$?

Задача 3. Пусть $K \subset L$ — конечное расширение полей. Докажите, что если $\text{char} K = 0$, то расширение сепарабельно.

Задача 4. Опишите подгруппу в группе автоморфизмов поля $\mathbb{C}(z)$, порождённую множеством автоморфизмов

$$\sigma(z) = iz, \quad \tau(z) = z^{-1}.$$

Опишите также поле инвариантов этой подгруппы.

Задача 5. Задайте подгруппу в группе автоморфизмов расширения $\mathbb{C} \subset \mathbb{C}(z)$ изоморфную S_4 .