

Программа коллоквиума по алгебре. 3 марта 2015 г.

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

1. Кольцо, поле, изоморфизм колец, подкольцо, делитель нуля, умножение матриц. Примеры: комплексные числа, поле из двух элементов, кольцо  $2 \times 2$  матриц, кольцо эндоморфизмов плоскости, кватернионы, октавы.
2. Делимость в кольцах, область целостности, простые и неприводимые элементы, факториальное кольцо, наибольший общий делитель. Пример неприводимого, но не простого элемента. Примеры: кольцо целых, кольцо многочленов, кольцо формальных степенных рядов, кольцо  $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ . Деление с остатком в кольце целых и в кольце многочленов над полем. Алгоритм Евклида.
3. Идеалы. Евклидовы кольца. Кольца главных идеалов. Факториальность колец главных идеалов. Китайская теорема об остатках для колец главных идеалов. Целые числа Гаусса и целые числа Гурвица. Связь с представимостью натуральных чисел в виде суммы  $2x$  и  $4x$  квадратов.
4. Прямая сумма колец, идемпотенты, китайская теорема об остатках для взаимно простых идеалов. Интерполяционная формула Лагранжа. Гомоморфизм колец, эндоморфизм кольца, ядро и образ гомоморфизма. Кольца вычетов. Конечные поля, число элементов в конечном поле.
5. Векторные пространства, подпространства, векторы. Примеры: координатное пространство, кольцо многочленов над полем, расширение поля, пространства над полем из двух элементов. Линейные операторы. Примеры: эндоморфизмы плоскости, умножение на многочлен и дифференцирование, умножение на элемент расширения. Линейные комбинации векторов, линейная независимость векторов.
6. Приведение матрицы к ступечатому виду элементарными преобразованиями строк. Ядро и образ линейного оператора. Базис и размерность. Классификация конечномерных векторных пространств. Интерполяционная формула Лагранжа и базисы в пространстве многочленов.
7. Сопряженное векторное пространство, двойственность. Ориентированный объём параллелепипеда. Определитель квадратной матрицы. Алгебра Грассмана.
8. Прямая сумма пространств. Сумма и пересечение подпространств. Симметрические и кососимметрические матрицы. Матрица линейного оператора. Собственные векторы и собственные числа оператора.
9. Теорема о существовании собственного вектора линейного оператора над полем комплексных чисел. Минимальный и характеристический многочлен линейного оператора. Теорема Гамильтона-Кэли.
10. Собственные и корневые подпространства линейного оператора. Резольвенты Лагранжа линейного оператора. Жорданова и фробениусова нормальные формы.
11. Группы, подгруппы, гомоморфизмы групп, действия групп на множествах, орбиты, стабилизаторы, коммутативные и циклические группы. Примеры: полная линейная группа  $GL_n$ , специальная линейная группа  $SL_n$ , группа вращений  $SO_n$ , симметрическая группа  $S_n$ , действие группы на себе слева, справа и сопряжениями.

Теорема Кэли. Разложение перестановки в произведение непересекающихся циклов, знак перестановки.

**12.** Связь между порядками стабилизатора и орбиты. Левые классы смежности по подгруппе, теорема Лагранжа. Циклическая группа простого порядка. Классы сопряженности, централизаторы, уравнение числа классов. Нормальные подгруппы, факторгруппы.

**13.** Теорема о гомоморфизме групп (нормальная подгруппа=ядро гомоморфизма). Пример: гомоморфизм из  $S_4$  в  $S_3$ , группа Клейна. Группа автоморфизмов циклической группы, связь с классификацией групп порядка  $pq$ , где  $p < q$  простые. Задание группы образующими и соотношениями. Пример: свободная группа с двумя образующими. Теорема о строении конечно-порождённых абелевых групп.

**14.** Приведение целочисленной матрицы к диагональному виду элементарными преобразованиями строк и столбцов. Степень расширения полей и приложения к классическим задачам о построении циркулем и линейкой. Группа автоморфизмов расширения.

**15.** Билинейные формы. Скалярное произведение. Ортогональное дополнение. Квадратичные формы. Поляризация. Нормальный вид квадратичной формы, метод Лагранжа приведения формы к сумме квадратов, связь с ортогонализацией Грама-Шмидта. Метод Якоби приведения формы к сумме квадратов. Критерий Сильвестра.

**16.** Операторы в евклидовых пространствах. Симметрические, кососимметрические и ортогональные операторы. Канонический вид симметрического и кососимметрического оператора; собственные значения. Канонический вид ортогонального оператора; собственные значения. Извлечение корня из положительного симметрического оператора. Полярное разложение.

**17.** Полуторалинейные и эрмитовы формы. Эрмитово пространство. Неравенство Коши-Буняковского-Шварца. Эрмитовы, косоэрмитовы и унитарные операторы. Собственные значения, диагонализуемость. Полярное разложение оператора в эрмитовом пространстве.

**18.** Комплексификация и о вещественности. Вещественная и комплексная структуры. Продолжение эрмитовой формы. Кватернионы, связь с геометрией трехмерного пространства. Накрытие  $SU_2(\mathbb{C}) \rightarrow SO_3(\mathbb{R})$ .

**19.** Максимальные и простые идеалы. Модули над кольцами: определение, примеры. Конечнопорожденные модули. Циклические модули. Аннулятор модуля. Свободные модули, ранг. Подмодули свободных модулей, их ранги.

**20.** Теорема о взаимных базисах для модулей над кольцом главных идеалов. Каноническое и примарное разложение конечно порожденного модуля. Единственность примарного разложения. Следствия: теорема о конечно порожденных абелевых группах и теорема о жордановой нормальной форме.

**21.** Полилинейные отображения. Тензорное произведение векторных пространств. Независимость от базиса, универсальное свойство. Примеры: комплексификация вещественных пространств,  $\text{Hom}(V, W)$  и пространства полилинейных отображений как тензорные произведения пространств.

**22.** Тензорная алгебра. Симметрические и внешние степени пространства. Симметрическая и внешняя алгебры.

- 23.** Симметризация и альтернирование. Разложимые поливекторы, грассманиан, вложение Плюккера. Задание грассманиана алгебраическими уравнениями.
- 24.** Кольцо многочленов от нескольких переменных и его свойства: соответствие между идеалами и алгебраическими подмножествами. Теорема Гильберта о нулях. Теорема Безу.
- 25.** Симметрические многочлены, элементарные симметрические функции, основная теорема о симметрических многочленах. Дискриминанты и результанты.
- 26.** Результант как определитель матрицы Сильвестра. Связь между квадратной матрицей с коэффициентами в кольце, матрицей алгебраических дополнений и определителем. Связь между результантом многочленов  $f$  и  $g$  и идеалом, порождённым  $f$  и  $g$ .
- 27.** Лемма Гаусса, критерий Эйзенштейна. Кольцо многочленов над факториальным кольцом факториально. Следствия: факториальность колец  $\mathbb{Z}[x]$  и  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ .
- 28.** Поле частных области целостности, группа Гротендика полугруппы: поле рядов Лорана, группа виртуальных выпуклых тел. Целые алгебраические числа. Кольца целых квадратичных числовых полей.
- 29.** Идеалы в кольцах целых мнимых квадратичных полей. Пример: идеалы в  $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ . Произведение идеалов. Группа классов идеалов и число классов. Разложение идеала (6) в  $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$  на простые идеалы.
- 30.** Существование и единственность разложения на простые идеалы в кольцах целых мнимых квадратичных полей. Квадратичные кольца, кольца целых числовых полей, дедекиндовы кольца.
- 31.** Представление группы, неприводимое представление, прямая сумма и тензорное произведение представлений. Примеры: тавтологическое представление симметрической группы, представления циклических групп, представления классических групп малых размерностей (исключительные гомоморфизмы). Теорема о классификации неприводимых представлений конечных групп. Характеры группы.
- 32.** Унитарные представления, инвариантные эрмитовы формы. Изоморфные представления. Существование инвариантной положительно определённой эрмитовой формы в представлении конечной группы. Инвариантные меры на  $S^1$ ,  $\mathbb{R}^*$ . Теорема Машке (над полем комплексных чисел).
- 33.** Двумерные комплексные представления конечных групп, классификация конечных подгрупп в  $SO_3(\mathbb{R})$ . Характер представления и его свойства. Таблица характеров для  $S_3$ .
- 34.** Расширения полей, степень расширения, алгебраические и трансцендентные элементы. Мультипликативность степени расширения для башен полей. Построения циркулем и линейкой, необходимое и достаточное условие разрешимости задачи на построение.
- 35.** Поликвадратичные поля. Круговые поля и правильные многоугольники, которые можно построить циркулем и линейкой. Неприводимость кругового многочлена и степень кругового поля. Квадратичное расширение поля рациональных чисел, лежащее в круговом поле, полученным присоединением первообразного корня простой степени.

**36.** Группа автоморфизмов расширения. Теорема о примитивном элементе. Сепарабельные и нормальные расширения. Пример конечного несепарабельного расширения и конечного расширения без примитивного элемента. Нормальность поля разложения многочлена. Расширения Галуа.

**37.** Четыре определения расширения Галуа: (1) нормальное сепарабельное расширение (2) порядок группы автоморфизмов равен степени расширения (3) поле инвариантов группы автоморфизмов совпадает с основным полем (4) поле разложения сепарабельного многочлена. Основная теорема теории Галуа.

**38.** Нормальные подгруппы группы Галуа. Примеры: промежуточные поля в поле разложения кубического и биквадратичного многочленов. Расширения с циклической группой Галуа и разрешения, полученные присоединением радикала. Резольвента Лагранжа.

**39.** Разрешимость в радикалах уравнений степени 3 и 4. Неразрешимость в радикалах уравнений степени 5 и выше. Примеры рациональных многочленов с группой Галуа  $A_3$ ,  $S_3$ ,  $V_4$ ,  $C_4$ ,  $D_4$ ,  $A_4$ ,  $S_4$  и  $S_5$ .