Алгебра II, весенний семестр 2015 г.
Листок 1. Срок сдачи 18 февраля.
факультет математики, НИУ ВШЭ

Решения нужно сдавать устно. Каждый пункт каждой задачи оценивается в один балл.

Задача 1. Пусть L/K — конечное расширение полей, и $a \in L$. След $\mathrm{tr}_{L/K}(a)$, определитель $N_{L/K}(a)$ и характеристический многочлен $\chi_{L/K}(a,t) := \det(\mathbf{a} - t\mathrm{Id})$ линейного над K оператора
$$\mathbf{a} : L \to L; \quad \mathbf{a} : l \mapsto al$$
называются следом, нормой и характеристическим многочленом элемента a над K. Докажите, что для башни конечных расширений $K \subset L \subset M$ и $a \in M$ верно

(а) $\mathrm{tr}_{M/K}(a) = \mathrm{tr}_{L/K}(\mathrm{tr}_{M/L}(a))$;

(б) $N_{M/K}(a) = N_{L/K}(N_{M/L}(a))$;

(в) $\chi_{M/K}(a) = N_{L(t)/K(t)}(\chi_{M/L}(a,t))$;

(г) минимальный многочлен элемента a над K равен $\pm\chi_{K(a)/K}(a,t)$;

(д) если M/K — расширение Галуа с группой Галуа G, то $\mathrm{tr}_{M/K}(a) = \sum_{g \in G} g(a)$, $N_{M/K}(a) = \prod_{g \in G} g(a)$, $\chi_{M/K}(a,t) = \prod_{g \in G}(g(a) - t)$.

Задача 2. (а) Докажите, что $\mathrm{tr}_{M/K}(a) = 0$ для всех $a \in M$ тогда и только тогда, когда расширение M/K несепарабельно.

(б) Докажите, что если разрешение M/K сепарабельно, то K-билинейная форма на M
$$(x,y) \mapsto \mathrm{tr}_{M/K}(xy)$$
невырождена.

(в) Пусть $p_1,\ldots,p_n \in \mathbb{N}$ — попарно различные простые числа. Докажите, что $\sqrt{p_1},\ldots,\sqrt{p_n}$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$.

Задача 3. Пусть K — поле, полученное из $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ присоединением всех первообразных корней степени l^k из 1 для всех простых чисел $l \neq p$ и $k \in \mathbb{N}$. Докажите, что K алгебраически замкнуто.

Задача 4. (а) Найдите степень кругового поля $\mathbb{Q}(\eta)$, где $\eta = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ — первообразный корень степени n из единицы.

(б) Докажите, что любое квадратичное расширение поля $\mathbb{Q}$ содержится в некотором круговом поле.

Задача 5. Пусть K —поле, и $\psi(t) = \frac{f(t)}{g(t)} \in K(t)$ — рациональная функция, представленная как отношение двух взаимно простых многочленов. Определим $\deg(\psi)$ как $\max(\deg(f), \deg(g))$ и положим $u = \psi(t)$.

(а) Докажите, что $\deg(\psi) = [K(t) : K(u)]$.

(б) Докажите, что всякий автоморфизм поля $K(t)$ над K имеет вид $t \to r(t)$, где $r(t)$ — рациональная функция степени 1.

(в) Докажите, что эта группа автоморфизмов порождается следующими отображениями:
$$t \mapsto at; \quad t \mapsto t + b; \quad t \mapsto \frac{1}{t},$$
где $a \in K^*$, $b \in K$. Эта группа состоит из преобразований вида $t \mapsto \frac{at+b}{ct+d}$, $ad - bc \neq 0$ и обозначается $PGL_2(K)$.

(г) Найдите порядок группы $PGL_2(\mathbb{F}_q)$, где $\mathbb{F}_q$ — конечное поле из q элементов.

(д) Докажите, что поле инвариантов группы $PGL_2(\mathbb{F}_q)$ равно $\mathbb{F}_q(u)$, где $u = \frac{(t^{q^2}-t)^{q+1}}{(t^q-t)^{q^2+1}}$.