Подготовительное домашнее задание перед контрольной.

1) a) Доказать, что не существует разветвленного накрытия $\mathcal{P}_g \to \mathcal{P}_{g'}$ степени больше 1 римановой поверхности рода g над римановой поверхностью рода g', если $g < 2g' - 1$.

b)* Является ли эта оценка точной: существует ли вышеупомянутое накрытие для любых g' и $g = 2g' - 1$? Какой у него порядок ветвления?

Напоминание. Кривая в $\mathbb{CP}^2$ называется *неособой (регулярной или гладкой),* если она является одномерным комплексным подмногообразием в $\mathbb{CP}^2$. В противном случае кривая называется особой.

2) Доказать, что все гиперэллиптические кривые степени не меньше 4 особы, а кривая Ферма $x^n + y^n = z^n$ не особа.

3) Пусть $\mathcal{P} \subset \mathbb{CP}^2$ – гладкая (т.е. неособая) алгебраическая кривая степени $d > 1$, $Q \in \mathbb{CP}^2 \setminus \mathcal{P}$.

a) Доказать, что проекция $\mathcal{P} \to \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{CP}^1$ из точки Q – разветвлённое накрытие степени d.

b)* Не используя формулы для рода, найти число точек ветвления проекции (суммарную кратность накрытия в критических точках). Вывести отсюда формулу для рода гладкой плоской кривой $\mathcal{P}$ степени d:

$$g = \frac{(d-1)(d-2)}{2}.$$

Указание. Выбрать точку Q и аффинную карту $\mathbb{C}^2 \subset \mathbb{CP}^2$ с координатами (x, y) так, чтобы бесконечная прямая $\overline{\mathbb{C}}_\infty = \mathbb{CP}^2 \setminus \mathbb{C}^2$ была трансверсальна кривой, содержала точку Q, и рассматриваемая проекция совпадала с проекцией на ось Ox. Рассмотреть многочлен $P(x, y)$, определяющий кривую $\mathcal{P} = \overline{\{P = 0\}}$, как семейство многочленов $p_x(y) = P(x, y)$ от y с фиксированным x, и его дискриминант $\Sigma(x)$ как функцию от x. Точки ветвления проекции суть значения x, для которых многочлен $p_x(y)$ имеет кратный корень: нули дискриминанта $\Sigma(x)$. Доказать, что дискриминант $\Sigma(x)$ является многочленом степени $d(d-1)$, исследовав его асимптотику на бесконечности.

4) Доказать, что проекция неособой кривой $\mathcal{P} \subset \mathbb{CP}^2$ степени d из точки $Q \in \mathcal{P}$ – разветвлённое накрытие степени[1] $d - 1$. Используя предыдущую формулу для рода, найти число точек ветвления.

5) a) Доказать, что на всякой компактной римановой поверхности $\mathcal{P}$ рода 2 существует мероморфная функция степени 2.

b) Доказать, что всякая риманова поверхность, допускающая мероморфную функцию степени 2, гиперэллиптична: задаётся полиномиальным уравнением

$$y^2 = P(x), \ P(x) - \text{ многочлен без кратных корней.} \tag{1}$$

[1]Имеется теорема (не входящая в курс), утверждающая, что при $d \geq 3$ число $d - 1$ – это минимальная степень непостоянной мероморфной функции $\mathcal{P} \to \overline{\mathbb{C}}$

Доказать, что её род равен $g=[\frac{deg(P)-1}{2}]$. (Тем самым, *всякая компактная риманова поверхность рода 2 гиперэллиптична.*)

6) Рассмотрим гиперэллиптическую кривую $\mathcal{P}$ вида (1), $d=deg(P)$. При каких d она регулярна (неособа) на бесконечности? Для любого d найти голоморфные карты на $\mathcal{P}$ в окрестности бесконечности и базис голоморфных дифференциалов.

7) В предыдущей задаче найти дивизоры
a) проекций кривой $\mathcal{P}$ на оси Ox и Oy;
b) построенных базисных голоморфных дифференциалов.

8) Пусть $\mathcal{P}$ – гиперэллиптическая кривая вида (1), $d=deg(P)\geq 3$. Пусть $x_1,\dots,x_d$ – корни многочлена P. Построить канонический базис в первых целочисленных гомологиях кривой относительно формы пересечения. В случаях, когда $d=3,5$, выразить периоды базисных голоморфных дифференциалов через интегралы явных функций от x по интервалам с граничными точками x_j (и ∞).

9)* Найти базисные голоморфные дифференциалы на кривой Ферма в $\mathbb{CP}^2$, заданной в однородных координатах уравнением $x^d+y^d=z^d$.

10) Пусть $\mathcal{P}$ – гиперэллиптическая кривая вида (1), $d=deg(P)\geq 3$, $x_1,\dots,x_d$ – корни многочлена P, $x_\infty\in\mathcal{P}$ – её точка на бесконечности (при нечетном d). Обозначим

$$M'=\{(x_1,0),\dots,(x_d,0)\}\subset\mathcal{P};$$

$$M=M' \text{ при чётном } d;\ M=M'\cup\{x_\infty\} \text{ при нечётном } d,$$

$$I:\mathcal{P}\to\mathcal{P} \text{ – стандартная инволюция: } I(x,y)=(x,-y).$$

Используя теорему Римана–Роха и элементарный комплексный анализ, найти размерность пространства мероморфных функций $f:\mathcal{P}\to\overline{\mathbb{C}}$, таких что $(f)\geq -D$, где
a) $D=p$, $p\in\mathcal{P}$.
b) $D=2p$, $p\in M$.
c) $D=p_1+p_2$, $p_2\neq I(p_1)$.
d) $D=p_1+p_2+p_3$, $p_2=I(p_1)$.
e) $D=p_1+p_2+p_3+p_4$, $p_2=I(p_1)$, $p_4\neq I(p_3)$

11)* Доказать, что на кривой рода не меньше 2 существует не более одной мероморфной функции степени 2 с точностью до композиции с автоморфизмом сферы Римана. Вывести отсюда, что кривая Ферма $\{x^4+y^4=z^4\}\subset\mathbb{CP}^2$ не гиперэллиптична.

12) Найти точки Вейерштрасса и их пробелы
a) на гиперэллиптической кривой (1) степени не меньше 4;
b)* на кривой Ферма степени 4 (используя результат задачи 9).