Алгебра II, весенний семестр 2015 г.
Листок 2. Срок сдачи 18 марта.
факультет математики, НИУ ВШЭ

Решения нужно сдавать устно. Каждый пункт каждой задачи оценивается в один балл.

Задача 1. (а) При каких условиях на рациональные p и q поле разложения многочлена

$$x^3 + px + q$$

содержит кубический корень из рационального числа, не являющегося полным кубом?

(б) При каких условиях на рациональные p и q поле разложения многочлена

$$x^4 + px^2 + q$$

содержит корень 4-ой степени из рационального числа, не являющегося полным квадратом?

Задача 2. Пусть L поле разложения рационального многочлена $f = x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ над $K = \mathbb{Q}(a_0, a_1, a_2, a_3)$, где a_0, a_1, a_2, a_3 формальные переменные.

(а) Докажите, что найдётся неприводимый кубический многочлен $g \in K[x]$ (*кубическая резольвента*), такой что поле разложения многочлена g содержится в L.

(б) Выразите коэффициенты многочлена g через $a_0,\ldots,$ a_3.

Задача 3. Докажите, что многочлен $f(x) = x^4+px+p$ неприводим для всех простых p и при $p \neq 3, 5$ имеет группу Галуа S_4. Докажите, что группа Галуа при $p = 3$ равна группе диэдра порядка 8, а при $p = 5$ — циклической группа порядка 4.

Задача 4. Пусть $\mathbb{F}$ поле из p^n элементов.

(а) Докажите, что автоморфизм Фробениуса $x \mapsto x^p$ является линейным оператором на $\mathbb{F}$, если $\mathbb{F}$ рассматривать как векторное пространство над $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Найдите собственные векторы, собственные числа и характеристический многочлен этого оператора.

(б) Докажите, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \subset \mathbb{F}$ является расширением Галуа, и найдите его группу Галуа.

Задача 5. Пусть $f(x)$ неприводимый многочлен степени n с целыми коэффициентами, а p простое число, не делящее старший коэффициент и дискриминант многочлена f. Предположим, что $f(x) \mod p$ раскладывается на неприводимые многочлены степеней $d_1,\ldots,$ d_k. Докажите, что группа Галуа многочлена f над $\mathbb{Q}$ обязательно содержит перестановку корней с циклическим типом $(d_1, \ldots, d_k)$.

Задача 6. (а) Докажите, что конечное расширение $K \subset L$ сепарабельно тогда и только тогда, когда для любого расширения $K \subset M$ алгебра $M \otimes_K L$ (над K) не содержит нильпотентов.

(б) Докажите, что если $K \subset L$ расширение Галуа с группой Галуа G, то имеет место изоморфизм K-алгебр:

$$L \otimes_K L \simeq \bigoplus_{g \in G} L.$$

Задача 7. (а) Рассмотрим поверхность $C \subset \mathbb{C}^2 = \{(x, t) \mid x, t \in \mathbb{C}\}$, заданную уравнением $x^3 - x - t = 0$. Определим отображение

$$\pi : C \to \mathbb{C}; \quad \pi : (x, t) \to t.$$

Докажите, что π является разветвлённым накрытием, и найдите его степень и множество точек ветвления. Проверьте, что поверхность C гладкая, и найдите её род.

(б) Пусть $K = \mathbb{C}(t)$, а L — поле разложения многочлена $x^3 - x - t$. Докажите, что $K \subset L$ является расширением Галуа, и его группа Галуа совпадает с группой монодромии накрытия $\pi : C \setminus \pi^{-1}(D) \to \mathbb{C} \setminus D$, где $D \subset \mathbb{C}$ — множество точек ветвления из пункта (а).

Задача 8. Пусть K — поле конечной характеристики p, а L — его расширения Галуа с группой Галуа $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Докажите, что найдётся элемент $a \in K$, такой что L является полем разложения многочлена $x^p - x - a$.