Алгебра II, весенний семестр 2015 г.

Задачи для подготовки к экзамену.

факультет математики, НИУ ВШЭ

Задача 1. Найдите группу Галуа рациональных многочленов
(а) x^3+x+1; (б) x^3-3x^2+1; (в) x^4-x^2+1; (г) x^4+x+1; (д) $x^{24}-1$; (е) $x^{27}-1$.

Задача 2. Найдите неприводимый рациональный многочлен степени 5 с циклической группой Галуа.

Задача 3. Пусть f — неприводимый многочлен степени n над полем $\mathbb{F}$, а $D(f)$ — его дискриминант. Верно ли, что f всегда останется неприводимым над полем $\mathbb{F}(\sqrt{D(f)})$ при

(а) $n=3$; (б) $n=4$?

Задача 4. (а) Докажите, что поле всех таких вещественных чисел, которые можно построить циркулем и линейкой (если изначально построены 0 и 1), является минимальным по включению среди всех подполей $K\subset\mathbb{R}$ со следующим свойством: если $a\in K$, и $a>0$, то и $\sqrt{a}\in K$.

(б) Можно ли построить какой-нибудь корень многочлена $x^4+8x+12$ циркулем и линейкой?

Задача 5. Верно ли, что если $K\subset L$ и $L\subset M$ расширения Галуа, то и $K\subset M$ — тоже?

Задача 6. Обозначим через $\mathbb{F}_q$ поле из q элементов. Докажите, что для любого $a\in\mathbb{F}_p^*$ многочлен x^p-x-a

(а) неприводим над $\mathbb{F}_p$,

(б) неприводим над $\mathbb{F}_{p^n}$ тогда и только тогда, когда p и n взаимно просты.