

Задачи для семинара 7.

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

ПОЛЕЗНЫЕ ФОРМУЛЫ:

(1) ДИСКРИМИНАНТ МНОГОЧЛЕНА $x^n + px + q$ РАВЕН

$$(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}(n-1)^{n-1}p^n + (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}n^nq^{n-1}.$$

(2) КУБИЧЕСКАЯ РЕЗОЛЬВЕНТА МНОГОЧЛЕНА $x^4 + px^2 + qx + r$ РАВНА

$$x^3 - px^2 - 4rx + (4pr - q^2).$$

Задача 1. Пусть f — неприводимый рациональный многочлен степени 4.

(а) Чему может быть равна группа Галуа многочлена f ?

(б) Чему может быть равна группа Галуа многочлена f , если один из его корней можно построить циркулем и линейкой?

Задача 2. Найдите группу Галуа многочленов

(а) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$; (б) $x^4 - 2$; (в) $x^4 + 8x + 12$; (г) $x^4 + 8x - 12$.

Задача 3. Пусть $H \subset S_5$ — подгруппа.

(а) Докажите, что H транзитивна (то есть её действие перестановками на множестве $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ транзитивно) тогда и только тогда, когда порядок $|H|$ делится на 5.

(б) Докажите, что H транзитивна тогда и только тогда, когда H содержит цикл длины 5. (Можно воспользоваться теоремой Коши: простое число p делит порядок конечной группы G тогда и только тогда, когда в G есть элемент порядка p).

(в) Докажите, что если транзитивная подгруппа H содержит транспозицию, то H совпадает с S_5 .

(г) Докажите, что группа Галуа многочлена

$$2x^5 - 10x + 5$$

изоморфна S_5 .

(д) Докажите, что группа Галуа многочлена

$$x^5 + 20x + 16$$

изоморфна A_5 . (Указание: приведите многочлен по модулю 3 и по модулю 7.)

Задача 4. Докажите формулы (1) и (2) (см. выше).

Задача 5 (David A. Cox, Galois Theory, Example 13.1.8). Пусть $x^4 + x + r$ — неприводимый многочлен в $\mathbb{Z}[x]$. При каком условии на r группа Галуа этого многочлена равна A_4 ?