Алгебра II, весенний семестр 2015 г.

Задачи для семинара 6.

факультет математики, НИУ ВШЭ

Задача 1. (а) Найдите группу Галуа поля разложения (над $\mathbb{Q}$) многочлена x^3+px+q, где $p, q \in \mathbb{Q}$ (ответ зависит от p и q).

(б) Опишите все промежуточные поля M между $\mathbb{Q}$ и полем из пункта (а). Для каких M раширение $\mathbb{Q} \subset M$ является расширением Галуа?

Задача 2. Найдите все промежуточные подполя M (и соответствующие им подгруппы в группе Галуа) в поле разложения (над $\mathbb{Q}$) многочлена

(а) $x^4 - 2$;

(б) $x^p - a$, где p простое число, и $a \in \mathbb{Q}$ не является p-той степенью.

Какие из расширений $\mathbb{Q} \subset M$ являются расширениями Галуа?

Задача 3. (а) Докажите, что дискриминант многочлена степени n с рациональными коэффициентами является полным квадратом тогда и только тогда, когда группа Галуа этого многочлена лежит в группе A_n всех чётных перестановок корней.

(б) Что можно сказать о группе Галуа неприводимого многочлена степени 4 над $\mathbb{Q}$, у которого есть ровно два вещественных корня?

Задача 4. (а) Пусть $K = \mathbb{C}(e_1, \ldots, e_n)$ — поле рациональных функций от переменных $e_1, \ldots, e_n$. Рассмотрим расширение $K \subset L$, где L — поле разложения многочлена

$$x^n - e_1x^{n-1} + e_2x^{n-2} + \ldots + (-1)^n e_n.$$

Найдите группу Галуа расширения $K \subset L$.

(б) Докажите, что для любой конечной группы G существует расширение Галуа с группой Галуа G.

Задача 5. Докажите, что корень многочлена f с рациональными коэффициентами можно построить циркулем и линейкой тогда и только тогда, когда поле разложения многочлена f имеет степень 2^n над $\mathbb{Q}$.