Алгебра II, весенний семестр 2015 г.

Домашнее задание 6. Срок сдачи 10 марта.

факультет математики, НИУ ВШЭ

Решения нужно сдавать в письменном виде и обязательно указывать НОМЕР ДОМАШНЕГО ЗАДАНИЯ на титульном листе. Пожалуйста, пишите разборчиво или набирайте в TeX.

Задача 1. Что можно сказать о группе Галуа неприводимого рационального многочлена четвёртой степени, у которого есть ровно два вещественных корня? Перечислите все возможности.

Задача 2. Найдите группу Галуа (над $\mathbb{Q}$) многочлена

$$x^4 - x^3 + x^2 - x + 1.$$

Задача 3. Предположим, что многочлен

$$x^4 + ax^2 + b$$

неприводим в $\mathbb{Q}[x]$. Докажите, что его группа Галуа совпадает

- с группой Клейна, если $\sqrt{b} \in \mathbb{Q}$,
- с циклической группой порядка 4, если $\sqrt{a^2 - 4b}\sqrt{b} \in \mathbb{Q}$,
- с D_4 в остальных случаях.

Задача 4. Пусть f неприводимый многочлен степени 6 над полем K, и пусть L — квадратичное расширение поля K. Докажите или опровергните: либо f остаётся неприводимым над L, либо раскладывается в произведение двух неприводимых кубических многочленов.

Задача 5. Пусть a — элемент поля $\mathbb{F}$, и $p \in \mathbb{N}$ — простое число. Предположим, что многочлен $x^p - a$ приводим в $\mathbb{F}[x]$. Докажите, что у него есть корень в $\mathbb{F}$.