# Римановы поверхности.

## Contents


1. Голоморфные атласы. 1
2. Голоморфные отображения. Формула Римана-Гурвица. 2
3. Плоские алгебраические кривые. 3
4. Мероморфные функции и дифференциалы. 5
5. Поле алгебраических функций. 6
6. Периоды голоморфных дифференциалов. 8
7. Билинейные соотношения Римана. 10
8. Дивизоры. 11
9. Теорема Римана-Роха. 12
10. Точки Вейерштрасса. 15
11. $\theta$-функции. 17
12. Абелевы торы и теорема Абеля. 19
13. Задача обращения Якоби. 22
14. Функция Бейкера-Ахиезера. 25
15. Уравнение Кадомцева-Петвиашвили. 28


## 1. Голоморфные атласы.

Двумерное топологическое многообразие называется *поверхностью.* Примером поверхности является сфера с конечным числом дыр, у которой граничный контур каждой дыры склеен с граничным контуром тора с дырой. Число вклеенных торов называется *родом поверхности.* Поверхности такого типа гомеоморфны, если и только если они имеют одинаковый род. Более того, можно доказать, что любая компактная ориентируемая поверхность гомеоморфна поверхности, построенной таким способом. Таким образом, род является единственным топологическим инвариантом связной компактной ориентируемой поверхности.

Риманова поверхность — это поверхность с дополнительной структурой, наделяющей точки поверхности некоторыми свойствами комплексных чисел. Эти свойства описываются с помощью *локальных карт*, то есть пар $(U, z)$, где $U$ — открытое подмножество поверхности $P$, а $z : U \to \mathbb{C}$ — непрерывное вложение в плоскость комплексных чисел $\mathbb{C}$. Семейством локальных карт $\{(U_\alpha, z_\alpha)|\alpha \in \mathcal{A}\}$ называется *голоморфным*, если отображения $z_\beta z_\alpha^{-1} : z_\alpha(U_\alpha \bigcap U_\beta) \to \mathbb{C}$ голоморфны для всех $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$. Голоморфные семейства локальных карт $\{(U_\alpha, z_\alpha)|\alpha \in \mathcal{A}\}$ и $\{(V_\beta, w_\beta)|\beta \in \mathcal{B}\}$ на поверхности $P$ считаются *эквивалентными*, если отображение $w_\beta z_\alpha^{-1} : z_\alpha(U_\alpha \bigcap V_\beta) \to \mathbb{C}$ голоморфно для всех $\alpha \in \mathcal{A}$, $\beta \in \mathcal{B}$.

Голоморфное семейство локальных карт, покрывающее всю поверхность, называется *голоморфным атласом.* *Римановой поверхностью* называется (топологическая) поверхность $P$ вместе с классом эквивалентности голоморфных атласов локальных карт.

Далее, если не оговорено противное, под поверхностью (в том числе и римановой) мы будем понимать связную компактную ориентируемую поверхность.

**Пример 1.1.** *Сфера Римана* $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\bigcup\infty$ *с атласом из двух локальных карт* $\{(U_1, z_1)(U_2, z_2)\}$, *где* $U_1 = \{z \in \mathbb{C}||z| < 2\}$, $z_1(z) = z\}$ *и* $U_2 = \{z \in \mathbb{C}||z| > \frac{1}{2}\}$, $z_2(z) = \frac{1}{z}\}$.

**Пример 1.2.** *Комплексный тор* $T = \mathbb{C}/\Gamma$, *где* $\Gamma$ *— группа параллельных переносов, порожденная сдвигами* $z \mapsto z + 1$ *и* $z \mapsto z + \tau$ *и* $\mathfrak{Im}(\tau) > 0$.

**Пример 1.3.** *Риманова поверхность произвольной аналитической функции.*

**Пример 1.4.** *Гиперэллиптическая риманова поверхность* $P_F = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2|F(x, y) = 0\}$, *где* $F(x, y) = y^2 - (x^{2m+1} + a_{2m}x^{2m} + ... + a_1x + a_0)$.

**Задача 1.1.** *Предъявить естественные голоморфные атласы локальных карт для примеров комплексных торов и гиперэллиптических римановых поверхностей.*

## 2. Голоморфные отображения. Формула Римана-Гурвица.

Пусть $P$ и $Q$ — римановы поверхности, заданные голоморфными атласами локальных карт $\{(U_\alpha, z_\alpha)|\alpha \in \mathcal{A}\}$ и $\{(V_\beta, w_\beta)|\beta \in \mathcal{B}\}$ соответственно. *Голоморфным отображением* римановой поверхности $P$ на риманової поверхность $Q$ называется отображение $f : P \to Q$ такое, что отображение $w_\beta f z_\alpha^{-1} : z_\alpha(U_\alpha \bigcap f^{-1}(V_\beta)) \to \mathbb{C}$ голоморфно и не тождественно для всех $\alpha \in \mathcal{A}$, $\beta \in \mathcal{B}$ таких что $U_\alpha \bigcap f^{-1}(V_\beta) \neq \emptyset$.

**Задача 2.1.** *Доказать, что это определение не зависит от выбора голоморфных атласов локальных карт, описывающих римановы поверхности* $P$ *и* $Q$. *Доказать, что* $f(P) = Q$. *Доказать, что число прообразов* $f^{-1}(p)$ *конечно для любой точки* $p \in P$.

Свойства голоморфного отображения $f : P \to Q$ в окрестности точки $p \in P$ описываются функцией $f_{\alpha\beta} = w_\beta f z_\alpha^{-1} : z_\alpha(U_\alpha \bigcap f^{-1}(V_\beta)) \to \mathbb{C}$, где $(U_\alpha, z_\alpha)$ и $(V_\beta, w_\beta)$ — локальные карты, содержащие точки $p$ и $f(p) \in Q$ соответственно. Как и всякая голоморфная функция, она представляется в виде ряда $f_{\alpha\beta} = \sum_{k=n}^{\infty} a_k z^k$, где $a_n \neq 0$. Число $n$ называется *степенью ветвления отображения* $f$ *в точке* $p$ и обозначается $\deg_p f$.

**Задача 2.2.** *Доказать, что степень ветвления голоморфного отображения* $f$ *в точке* $p$ *не зависит от выбора локальных карт* $(U_\alpha, z_\alpha)$ *и* $(V_\beta, w_\beta)$. *Более того, локальные карты можно выбрать таким образом, чтобы* $f_{\alpha\beta}(z_\alpha) = z^n$.

Точка $p \in P$ называется *критической точкой* голоморфного отображения $f$, если $\deg_p f > 1$, то есть $f'_{\alpha\beta}(z_\alpha(p)) = 0$. Точка $q \in Q$ называется *критическим значением* голоморфного отображения $f$, если прообраз $f^{-1}(q)$ имеет хотя бы одну критическую точку.

Компактные римановы поверхности представляют особый интерес. Мы докажем далее, что категория компактных римановых поверхностей изоморфна категории комплексных алгебраических кривых. Топологический тип связной компактной римановой поверхности полностью определяется ее родом. Говоря о римановой поверхности рода $g$ мы всегда будем иметь в в виду связную поверхность.

**Задача 2.3.** *Пусть* $f : P \to Q$ *— голоморфное отображение компактных римановых поверхностей и* $Q = f(P)$. *Докажите, что число критических точек* *отображения $f$ конечно и ограничение $f$ на достаточно маленькую окрестность некритической точки является гомеоморфизмом.*

**Задача 2.4.** *Пусть $f : P \to Q$ — голоморфное отображение компактных римановых поверхностей и $V \subset Q$ — область, замыкание которой связно, односвязно и не содержит критических значений $f$. Тогда прообраз $f^{-1}(V)$ распадается на конечное число компонент связности, на любой из которых отображение $f$ порождает гомеоморфизм.*

**Лемма-определение 2.1.** *Пусть $f : P \to Q$ — голоморфное отображение компактных римановых поверхностей, причем $Q = f(P)$ — связная поверхность. Тогда число прообразов $|f^{-1}(q)|$ одинаково для всех некритических значений $q \in Q$ и называется степенью $\deg f$ отображения $f$.*

*Proof.* Рассмотрим не критические значения $q_1, q_2 \in Q$ и содержащую их связную односвязную область $V$, замыкание которой не содержит критических значений $f$. Тогда, согласно предыдущей лемме, в каждой компоненте связности прообраза $f^{-1}(V)$ лежит ровно один прообраз из $f^{-1}(q_i)$. Следовательно, число прообразов $|f^{-1}(q_i)|$ совпадает с числом компонент связности прообраза $f^{-1}(V)$. □

**Задача 2.1.** *Рассмотрим голоморфное отображение компактных римановых поверхностей $f : P \to Q$. Доказать, что $\deg f = \sum\limits_{p \in f^{-1}(q)} \deg_p f$ для любой точки $q \in Q$.*

**Теорема 2.1.** *(Формула Римана-Гурвица) Пусть $f : P \to Q$ — голоморфное отображение римановой поверхности $P$ рода $\tilde{g}$ на риманову поверхность $Q$ рода $g$. Тогда $\tilde{g} = (\deg f)(g-1) + \frac{1}{2}\sum\limits_{p\in P}(\deg_p f - 1) + 1$.*

*Proof.* Триангулируем поверхность $Q$ так, чтобы вершины триангуляции включали все критические значения. Пусть эта триангуляция состоит из $F$ граней, $E$ ребер и $V$ вершин. Прообраз этой триангуляции образует триангуляцию поверхности $P$. Она состоит из $(\deg f)F$ треугольников, $(\deg f)E$ ребер и $(\deg f)V - \sum\limits_{p\in P}(\deg_p f) - 1)$ вершин, поскольку каждый треугольник с вершиной $q \in Q$ порождает ровно $\deg_p f$ треугольников с вершиной в $p \in f^{-1}(q)$. Подсчет эйлеровых характеристик дает $2 - 2g = F - E + V$, $2 - 2\tilde{g} = (\deg f)F - (\deg f)E + (\deg f)V - \sum\limits_{p\in P}(\deg_p f - 1)$, откуда $2(\deg f)(1-g) - 2(1-\tilde{g}) = \sum\limits_{p\in P}(\deg_p f - 1)$. □

## 3. Плоские алгебраические кривые.

Пусть $F(z, w)$ — многочлен от двух переменных. Множество точек $P_F = \{((z, w) \in \mathbb{C} | F(z, w) = 0\}$ называется *плоской аффинной комплексной алгебраической кривой.* Для плоской аффинной комплексной алгебраической кривой выполняется голоморфный аналог теоремы о неявной функции.

**Теорема 3.1.** *Пусть $F(z_0, w_0) = 0$ и $\frac{\partial F}{\partial w}(z_0, w_0) \neq 0$. Тогда в окрестности точки $z_0$ существует и единственна однолистная голоморфная функция $w = w(z)$ такая что $w_0 = w(z_0)$ и $F(z, w(z)) = 0$.*

*Proof.* Пусть $z = x+iy$, $w = u+iv$, $F = f+ig$. Если рассматривать функцию $F(z_0, w)$ как отображение $(u,v) \mapsto (f,g)$, то ее якобиан в точке $w_0 = (u_0, v_0)$ равен

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & -\frac{\partial g}{\partial u} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial u} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2 = \left|\frac{\partial F}{\partial w}\right|^2$$

и, следовательно, не равен 0 в точке $w_0$. Поэтому, согласно теореме о неявном отображении, в окрестности точки $z_0$ существуют функции

$$u(z) = u(x,y), \quad v(z) = v(x,y), \quad w(x,y) = u(x,y) + iv(x,y),$$

реализующие, порождающие взаимно-однозначное отображение $(x,y) \mapsto (u,v)$ и такие что $F(z, w(z,\bar{z})) = F(z, w(x,y)) = 0$. Кроме того

$$0 = \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial F}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial F}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}.$$

Неравенство $\frac{\partial F}{\partial w} \neq 0$ влечет $\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = 0$. □

**Следствие 3.1.** *В окрестности точки $(z_0, w_0)$, где $\frac{\partial F}{\partial w}(z_0, w_0) \neq 0$, отображение $z \mapsto (z, w(z)))$ задает локальную карту на $P_F$. Множество всех таких карт образует голоморфный атлас на множестве $P_F - \Sigma_w$, где $\Sigma_w = \{(z,w) \in P_F | \frac{\partial F}{\partial w}(z,w) \neq 0\}$*

Аналогичным образом определяется голоморфный атлас локальных карт на $P_F - \Sigma_z$, где $\Sigma_z = \{(z,w) \in P_F | \frac{\partial F}{\partial z}(z,w) \neq 0\}$.

**Задача 3.1.** *Докажите, что эти атласы эквивалентны на $P_F - (\Sigma_z \bigcup \Sigma_w)$.*

Кривая $P_F$ называется *неособой*, если $|\frac{\partial F}{\partial z}(z,w)| + |\frac{\partial F}{\partial w}(z,w)| > 0$ для всех $\{(z,w) \in \mathbb{C} | F(z,w) = 0\}$. В этом случае построенные выше атласы задают на $P_F$ структуру римановой поверхности. Многообразие $P_F$, однако не компактно. Ни к одной из ее точек не сходится, в частности, последовательность $\{(z_n, w_n) \in \mathbb{C} | F(z_n, w_n) = 0\}$, где $z_n \to \infty$. Для того чтобы компактифицировать множество $P_F$ рассмотрим множество $c_R = \{z \in \mathbb{C} | |z| > R\}$, где число $R$ больше модуля любого критического значения функции $h(z,w) = z$ на $P_F$. Множество $h^{-1}(c_R)$, без ветвлений накрывает цилиндр $c_R$. Продолжим это накрытие до отображения $f^{-1}(c_R) \cup D \to c_R \cup \infty$, добавив по точке к каждой компоненте связности прообраза $h^{-1}(c_R)$. Это продолжение вместе с отображением $h$ порождает отображение $\tilde{h} : P \to \overline{\mathbb{C}}$ поверхности $\bar{P}_F = P_F \bigcup D$ на сферу Римана.

**Задача 3.2.** *Докажите, что поверхность $\bar{P}_F$ компактна и ,если поверхность $\bar{P}_F$ связна, найдите ее род для многочлена $F$ степени $d$ общего положения.*

**Задача 3.3.** *Докажите, что поверхность $\bar{P}_F$ обладает структурой римановой поверхности относительно которой $\tilde{h}$ — голоморфное отображение.*

Риманова поверхность $\bar{P}_F$ называется *римановой поверхностью многочлена $F$ и алгебраической кривой $F = 0$.*

**Задача 3.4.** *Докажите, что любая рациональная функция $R(z,w)$ порождает мероморфную функцию на $\bar{P}_F$.*

Как мы только что видели, плоскую аффинную алгебраическую кривую можно рассматривать, как риманову поверхность с выбранной парой мероморфных функций. Эти кривые являются объектами категории, морфизмами которой являются рациональные замены переменных $z \mapsto \tilde{z}(z,w)$, $w \mapsto \tilde{w}(z,w)$. Класс изоморфизма в этой категории уже не зависит от пары функций. Более того, далее мы докажем далее, что эта категория изоморфна категории компактных римановых поверхностей.

## 4. Мероморфные функции и дифференциалы.

Пусть $P$ — риманова поверхность, заданная голоморфным атласом локальных карт $\{(U_\alpha, z_\alpha) | \alpha \in \mathcal{A}\}$. Голоморфное отображение $f : P \to \overline{\mathbb{C}}$ на сферу Римана $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$ называется *мероморфной функцией*.

Это означает, что в окрестности точки $p \in U_\alpha$ она имеет вид $f|_{U_\alpha}(p) = \sum_{i=k}^{\infty} a_i (z_\alpha(p))^i$, где $a_k \neq 0$. При этом $k \geq 0$, если $f(p) \in \mathbb{C}$ и $k < 0$, если $f(p) = \infty$. В последнем случае точка $p$ называется *полюсом функции $f$ порядка $-k$*. Полюс порядка 1 называется *простым*.

**Задача 4.1.** *Доказать, что проекции $(x, y) \mapsto x$ и $(x, y) \mapsto y$ являются мероморфными функциями на гиперэллиптической римановой поверхности $P_F$. Найти полюса этих функций и их порядки.*

**Задача 4.2.** *Докажите, что множество мероморфных функций на связной римановой поверхности $P$ образует поле $\mathcal{M}(P)$*

*Мероморфный дифференциал* на римановой поверхности $P$ определяется семейством мероморфных функций $\{f_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C} | \alpha \in \mathcal{A}\}$ на локальных картах $\{(U_\alpha, z_\alpha)\}$ таким, что $\frac{f_\alpha}{f_\beta} = (z_\beta z_\alpha^{-1})'_{z_\alpha}$ на $U_\alpha \bigcap U_\beta$. Отвечающий этому семейству функций мероморфный дифференциал имеет вид $f_\alpha dz_\alpha$ в любой локальной карте на $P$. Нетрудно видеть, что мероморфные дифференциалы (как и мероморфные функции) образуют векторное пространство над полем комплексных чисел.

**Задача 4.3.** *Доказать, что определение мероморфного дифференциала зависит лишь от римановой поверхности. Другими словами, для каждого эквивалентного голоморфного атласа локальных карт $\{(V_\beta, w_\beta) | \beta \in \mathcal{B}\}$ существует однозначно определенный голоморфный дифференциал $h_\alpha dw_\alpha$ такой что $\frac{f_\alpha}{h_\beta} = (w_\beta z_\alpha^{-1})'_{z_\alpha}$ на $U_\alpha \bigcap V_\beta$.*

Если $f_\alpha(p) = \sum_{i=k}^{\infty} a_i (z_\alpha(p))^i$, $a_k \neq 0$ и $k < 0$, то точка $p$ называется *полюсом мероморфного дифференциала $\omega$*, а число $-k$ — *порядком полюса*. Мероморфный дифференциал без полюсов называется *голоморфным дифференциалом*.

**Задача 4.4.** *Доказать, что множество полюсов мероморфного дифференциала и их порядки не меняются при замене голоморфного атласа локальных карт на эквивалентный.*

**Теорема 4.1.** *Пусть $P$ — произвольная Риманова поверхность рода $g$. Тогда: 1) на $P$ существует не менее $g$ линейно независимых голоморфных дифференциалов; 2) для любой точки $p \in P$ и целого $k > 1$ существует мероморфный дифференциал с единственным полюсом порядка $k$ в точке $p$; 3) для любой пары точек $p_1 \neq p_2 \in P$ существует мероморфный дифференциал, имеющий в точках $p_1$ и $p_2$ полюса первого порядка и не имеющий других полюсов.*

Эта замечательная и очень важная теорема явилась одним из главных достижений математики конца 19 века. В ее доказательстве приняли участие Риман, Вейерштрасс, Пуанкаре, Клейн, Гильберт, Г.Вейль, П.Кебе. Мы докажем ее позже.

**Задача 4.5.** *Доказать, что дифференциал, описанный в пункте 2), представляется в виде* $(\frac{1}{z^k}+\sum_{i=1}^{\infty}a_iz^i)dz$ *для некоторой локальной карты* $z$ *в окрестности точки* $p$.

**Задача 4.6.** *Доказать, что формула* $\omega=\frac{g(x)dx}{y}$ *при любом многочлене* $g(x)$ *описывает мероморфный дифференциал на гиперэллиптической римановой поверхности* $P_F$. *Найти полюса этого дифференциала и их порядки. Проиллюстрировать последнюю теорему на примере гиперэллиптических римановых поверхностей.*

## 5. Поле алгебраических функций.

**Лемма 5.1.** *Пусть* $f,h:P\to\overline{\mathbb{C}}$ *— мероморфные функции на римановой поверхности* $P$ *и* $\deg h=n$ . *Тогда существуют рациональные функции* $r_k:\overline{\mathbb{C}}\to\overline{\mathbb{C}}(k=1,...,n)$ *такие, что* $f^n+r_1(h)f^{n-1}+...+r_{n-1}(h)f+r_n(h)=0$ *на* $P$.

*Proof.* Рассмотрим симметрические функции

$$\sigma_k(x_1,...,x_n)=(-1)^k\sum_{1\le i_1<i_2<...<i_k\le n}x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_k}.$$

Для каждого $z\in\overline{\mathbb{C}}$ рассмотрим $h^{-1}(z)=\bigcup p_i(z)$ и положим $r_k(z)=\sigma_k(f(p_1(z)),...,f(p_n(z)))$. (Это определение корректно, поскольку $\sigma_k(f(p_1(z)),...,f(p_n(z)))$ не зависит от нумерации точек множества $h^{-1}(z)$.) Тогда

$$r_k(h(p))=\sigma_k(f(p_1(h(p))),...,f(p_n(h(p)))).$$

Следовательно, согласно теореме Виета,

$$(f^n+r_1(h)f^{n-1}+...+r_{n-1}(h)f+r_n(h))(p)=(f(p)-f(p_1(h(p))))(f(p)-f(p_2(h(p))))$$

$$...(f(p)-f(p_n(h(p))))=0$$

при $p\in P$, поскольку хотя бы одна из скобок обращается в 0. □

Многочлен $F(y,z)$ называется *приводимым*, если он представляется в виде произведения двух многочленов положительной степени по $z$, коэффициенты которых являются рациональными функциями от $w$. В противном случае $F(y,z)$ называется *неприводимым.*

**Задача 5.1.** *Докажите, что риманова поверхность приводимого многочлена не связна.*

**Теорема 5.1.** *Пусть* $h:P\to\overline{\mathbb{C}}$ *— мероморфная функция степени* $n$ *на связной римановой поверхности* $P$. *Тогда существуют мероморфная функция* $f:P\to\overline{\mathbb{C}}$ *и неприводимый многочлен* $F(z,y)$ *такие, что* $F(f,h)=0$ *на* $P$.

*Proof.* Рассмотрим точку $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ такую, что $h^{-1}(z_0) = \bigcup\limits_{i=1}^{n} p_i$, причем $p_i \neq p_j$ при $i \neq j$. Функция $h$ порождает локальную карту $z_i$ в окрестность точки $p_i$, где $h(p) = (z_i - z_0)$. Рассмотрим мероморфный дифференциал $\omega_i$, голоморфный вне $p_i$ и такой, что

$$\omega_i = (\frac{1}{(z_i - z_0)^2} + \sum_{n=0}^{\infty}(z_i - z_0)^n)dz_i \quad \text{в окрестности точки} \quad p_i.$$

Рассмотрим мероморфную функцию

$$f(p) = (h(p) - z_0)^2(c_1\frac{\omega_1}{dh} + ... + c_n\frac{\omega_n}{dh}), \quad \text{где} \quad c_i \neq c_j.$$

Тогда $f(p_i) = c_i$. Рассмотрим, существующий согласно предыдущей лемме, многочлен $F(y, z)$ такой что $F(f, h) = 0$ на $P$. Этот полином неособый для набора чисел $\{c_i\}$ общего положения.

Докажем ,что он неприводим. Пусть $F = F_1F_2$, где $F_1(y, z)$ и $F_2(y, z)$ — многочлены положительной степени по $z$, коэффициенты которых являются рациональными функциями от $y$. Предположим, что $F_1(f(p_1), h(p_1)) = 0$. В окрестности точки $p_1$ рассмотрим локальную карту $u = f(p)$. В окрестности точки $c_1 = f(p_1)$ рассмотрим голоморфную функцию $H(u)$ перехода между локальными картами, то есть $H(u(p)) = h(p)$. Тогда $F_1(u, H(u)) = F_1(f(p), h(p)) = 0$.

Рассмотрим путь $\Gamma_i \in P$, соединяющий точки $p_1$ и $p_i$. Положим $\gamma_i = f(\Gamma_i)$ и рассмотрим аналитическое продолжение функции $H(u)$ вдоль пути $\gamma_i$. В результате в окрестности точки $c_i = f(p_i)$ мы получаем голоморфную функцию $\tilde{H}(\tilde{u})$ такую что $F_1(\tilde{u}, \tilde{H}(\tilde{u})) = 0$. Следовательно $F_1(c_i, z_0) = F_1(f(p_i), h(p_i)) = 0$. Таким образом, $\deg_z F_1 = n$ и, следовательно, $\deg_z F_2 = 0$ □

**Следствие 5.1.** *Всякая компактная связная риманова поверхность является римановой поверхностью некоторой плоской аффинной неприводимой комплексной алгебраической кривой.*

**Задача 5.2.** *Пусть многочлен $F(y, z)$ нельзя представить в виде произведения двух многочленов положительной степени по $z$, коэффициенты которых являются рациональными функциями от $y$. Тогда его нельзя представить в виде произведения двух многочленов положительной степени по $y$, коэффициенты которых являются рациональными функциями от $z$.*

**Теорема 5.2.** *Пусть $P$ — риманова поверхность неприводимого многочлена $F(z, y)$ и $h : P \to \overline{\mathbb{C}}$ — мероморфная функция. Тогда существует рациональная функция $R(z, y)$ такая, что $h(p) = R(z(p), y(p))$.*

*Proof.* Рассмотрим точку $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ такую, что $z^{-1}(z_0) = \bigcup\limits_{i=1}^{n} p_i$, где $p_i \neq p_j$ при $i \neq j$. Тогда $\{p_i\}$ — это все точки римановой поверхности вида $(z_0, y)$. Рассмотрим функцию

$$\Phi(y) = \Phi_{z_0}(y) = F(z_0, y) = (y - y(p_1))...(y - y(p_n)).$$

Многочлен $\Phi(y)$ не имеет кратных корней ввиду неприводимости $F$. Поэтому многочлены $\Phi(y)$ и $\Phi'(y)$ взаимно просты. Следовательно существуют многочлены $H(y) = H_{z_0}(y)$ и $L(y) = L_{z_0}(y)$ такие что $H\Phi' + L\Phi = 1$. В частности, $H(y(p_i))\Phi'(y(p_i)) = 1$. Положим

$$G(y) = G_{z_0}(y) = \Big(\frac{h(p_1)}{y - y(p_1)} + ... + \frac{h(p_n)}{y - y(p_n)}\Big)\Phi(y) =$$

$$\Big(\frac{h(p_1)}{y-y(p_1)}+...+\frac{h(p_n)}{y-y(p_n)}\Big)(y-y(p_1))...(y-y(p_n)).$$

Тогда

$$h(p_i)=\frac{G(y(p_i))}{\Phi'(y(p_i))}=\frac{H(y(p_i))G(y(p_i))}{H(y(p_i))\Phi'(y(p_i))}=G_{z_0}(y(p_i))H_{z_0}(y(p_i)).$$

Функции $G_{z_0}$ и $H_{z_0}$ являются многочленами с коэффициентами, рационально зависящими от $z_0$. Таким образом, функция $R(z_0,y)=G_{z_0}(y)H_{z_0}(y)$ рациональна. Кроме того $h(p)=R(z(p),y(p))$, поскольку функции совпадают во всех прообразах $z^{-1}(z_0)$ при всех $z_0$. □

Рассмотрим алгебру над $\mathbb{C}$, свободно порожденную (мультипликативными) образующими $x$ и $y$. Ее элементы можно рассматривать как комплексные многочлены от $(x,y)$. Каждый многочлен $F(x,y)$ порождает идеал $I(F)$. Из предыдущей теоремы следует.

**Следствие 5.2.** *Поле $\mathcal{M}(P)$ мероморфных функций на связной римановой поверхности $P$ естественно изоморфно полю $\mathcal{M}(F)=\mathcal{M}/I(F)$, где $F(x,y)$ — неприводимый многочлен, риманова поверхность которого изоморфна $P$. Идеал $I(F)$ отождествляется при этом с идеалом $I(P)$ многочленов, порождающих на $P$ нулевую функцию.*

**Следствие 5.3.** *Неприводимый многочлен $F(x,y)$ порождает связное многообразие $\bar P_F$.*

*Proof.* Предположим, что поверхность $P=\bar P_F$ распадается на компоненты связности $P_1=\bar P_{F_1}$ и $P_2=\bar P_{F_2}$. Как уже доказано поле $\mathcal{M}(P_i)$ отождествляется с полем $\mathcal{M}(F_i)$, где $F_i$ — неприводимый многочлен. Идеал $I(F_i)$ совпадает с идеалом многочленов, порождающих на $P_i$ нулевую функцию. Следовательно $I(F)\subset I(F_i)$ и $F=G_iF_i$, где $G_i\in\mathcal{M}(F)$. Таким образом, $F=GF_1F_2$ где $G\in\mathcal{M}(F)$. □

Мы доказали, что категория связных римановых поверхностей изоморфна категории неприводимых многочленов $F(x,y)$ (с коэффициентами $C$), где морфизмы – это рациональные замены переменных $z\mapsto\tilde z(z,w)$, $w\mapsto\tilde w(z,w)$. Последняя категория может исследоваться чисто алгебраическими методами. Таким образом, многие геометрические результаты о римановых поверхностях могут быть переписаны в чисто алгебраических терминах. В этой переформулировке многие результаты остаются верными при замене поля комплексных чисел на произвольное алгебраически замкнутое поле, например на поле алгебраических чисел. Такой подход называется *алгебраической теорией чисел.* Он позволяет разрабатывать теорию чисел с помощью геометрических идей теории римановых поверхностей.

## 6. Периоды голоморфных дифференциалов.

Согласно нашим определения мероморфный дифференциал $\omega$ в каждой локальной карте $z:U\to\mathbb{C}=\{(x+iy)\}$ представляется в виде $\omega=S(x,y)dx+T(x,y)dy$, где $dz=dx+idy$.

**Задача 6.1.** *Доказать, что $\omega=S(x,y)dx+T(x,y)dy$ — это замкнутая дифференциальная 1-форма (т.е $d\omega=0$). В частности, для любого* *ориентированного отрезка $l \subset P$ определен интеграл $\int\limits_l \omega$, не меняющийся при постоянных на концах гомотопиях отрезка $l$.*

*Каноническим базисом циклов* на поверхности $P$ рода $g$ мы будем называть систему простых замкнутых ориентированных контуров $\{a_i, b_i | i = 1, ..., g\}$, которые пересекаются в одой точке, не имеют других попарных точек пересечения и индексы пересечения равны $(a_i, a_j) = (b_i, b_j) = 0$, $(a_i, b_j) = \delta_{ij}$.

**Теорема 6.1.** *Пусть $\omega$, $\omega'$ — замкнутые дифференциальные 1-формы на поверхности $P$ и $\mathfrak{B} = \{a_i, b_i | i = 1, ..., g\} \subset P$ — канонический базис циклов. Положим $A_i = \oint\limits_{a_i} \omega$, $B_i = \oint\limits_{b_i} \omega$, $A'_i = \oint\limits_{a_i} \omega'$, $B'_i = \oint\limits_{b_i} \omega'$. Тогда $\iint\limits_P \omega \wedge \omega' = \sum\limits_{i=1}^{g} (A_i B'_i - A'_i B_i)$.*

*Proof.* Разрезая поверхность $P$ по циклам $\mathfrak{B}$, получаем $4g$- угольник $\Gamma$ со сторонами $a_1, b_1, a_1^{-1}, b_1^{-1}, a_1, b_1, a_1^{-1}, b_1^{-1}, ..., a_g, b_g, a_g^{-1}, b_g^{-1}$. Фиксируем точку $p_0 \in P$ и рассмотрим интегралы $f(p) = \int\limits_{[p_0,p]} \omega$ по путям внутри $\Gamma$ с началом в $p_0$ и концом в $p$. Тогда $d(f\omega') = df \wedge \omega' = \omega \wedge \omega'$ и согласно формуле Стокса

$$\iint\limits_P \omega \wedge \omega' = \oint\limits_{\partial\Gamma} f\omega' = \sum_{i=1}^{g} (\oint\limits_{a_i} f\omega' + \oint\limits_{a_i^{-1}} f\omega') + \sum_{i=1}^{g} (\oint\limits_{b_i} f\omega' + \oint\limits_{b_i^{-1}} f\omega').$$

С другой стороны, для точек $p_i \in a_i$, $\tilde{p}_i \in a_i^{-1}$, отвечающих одной и той же точке $p \in P$ мы имеем $f(\tilde{p}_i) - f(p_i) = \oint\limits_{b_i} \omega = B_i$. Таким образом,

$$\oint\limits_{a_i} f(p_i)\omega'(p_i) + \oint\limits_{a_i^{-1}} f(\tilde{p}_i)\omega'(\tilde{p}_i) = \oint\limits_{a_i} f(p_i)\omega'(p_i) - \oint\limits_{a_i} (f(p_i) + B_i)\omega'(p_i) = -B_i \oint\limits_{a_i} \omega'(p_i) = -B_i A'_i.$$

Аналогично $\oint\limits_{b_i} f(p_i)\omega'(p_i) + \oint\limits_{b_i^{-1}} f(\tilde{p}_i)\omega'(\tilde{p}_i) = A_i B'_i$. Таким образом, $\iint\limits_P \omega \wedge \omega' = \sum\limits_{i=1}^{g} (A_i B'_i - A'_i B_i)$. □

**Следствие 6.1.** *Пусть $\omega$ и $\omega'$ — голоморфные дифференциалы и $A_i = \oint\limits_{a_i} \omega$, $B_i = \oint\limits_{b_i} \omega$, $A'_i = \oint\limits_{a_i} \omega'$, $B'_i = \oint\limits_{b_i} \omega'$. Тогда $\sum\limits_{i=1}^{g} (A_i B'_i - A'_i B_i) = 0$. Если, кроме того, $\omega \neq 0$, то $\mathfrak{Im}(\sum\limits_{i=1}^{g} (A_i \overline{B}_i)) < 0$. В частности, $\omega = 0$, если $A_i = 0$ для всех $i$.*

*Proof.* Первое утверждение следует из $\omega \wedge \omega' = 0$ Комплексно сопряженный дифференциал $\bar{\omega} = \bar{f}(\bar{z})d\bar{z}$ тоже замкнут, причем $\bar{A}_i = \oint\limits_{a_i} \bar{\omega}$, $\bar{B}_i = \oint\limits_{b_i} \bar{\omega}$. Поэтому $\mathfrak{Im}(\sum\limits_{i=1}^{g} (A_i \overline{B}_i)) = -\frac{i}{2} \sum\limits_{i=1}^{g} (A_i \bar{B}_i - \bar{A}_i B_i) = -\frac{i}{2} \iint\limits_P \omega \wedge \bar{\omega} = -\iint\limits_P |f'|^2 dx \wedge dy < 0$. □

**Задача 6.2.** *Доказать, что размерность пространства голоморфных дифференциалов на римановой поверхности рода $g$ равна $g$. Более того, для* *любого канонического базиса циклов существует единственный набор голоморфных дифференциалов $\{\omega_1, ..., \omega_g\}$ такой что $\int\limits_{a_i} \omega_j = 2\pi \mathbf{i} \delta_{ij}$.*

*Периодом мероморфного дифференциала* называется его интеграл по замкнутому контуру. Рассмотрим базис голоморфных дифференциалов $\{\omega_1, ..., \omega_g\}$ о котором идет речь в предыдущей задаче. Возникающая при этом матрица $B_{ij} = \int\limits_{b_i} \omega_j$ называется *матрицей периодов голоморфных дифференциалов* на поверхности $P$, отвечающей каноническому базису циклов $\{a_i, b_i | i = 1, ..., g\}$.

**Теорема 6.2.** *Матрица периодов голоморфных дифференциалов отвечающей каноническому базису циклов $\{a_i, b_i | i = 1, ..., g\}$ симметрична и ее вещественная часть отрицательно определена.*

*Proof.* Положим $\omega = \omega_k$, $\omega' = \omega_j$ и определим $A_i$, $B_i$,$A'_i$,$B'_i$ как в теореме 6.1. Тогда, согласно следствию 6.1

$$0 = \sum_{i=1}^{g} (A_i B'_i - A'_i B_i) = \sum_{i=1}^{g} (2\pi \mathtt{i} \delta_{ik} B_{ij} - 2\pi \mathtt{i} \delta_{ij} B_{ik}) = 2\pi \mathtt{i} (B_{kj} - B_{jk}).$$

Таким образом, $B_{kj} = B_{jk}$.

Рассмотрим линейную комбинацию с вещественными коэффициентами $\omega = \sum\limits_{k=1}^{g} x_k \omega_k$ и положим $A_i = \oint\limits_{a_i} \omega$, $B_i = \oint\limits_{b_i} \omega$. Тогда $A_i = 2\pi \mathtt{i} x_i$, $B_i = \sum\limits_{k=1}^{g} x_k B_{ik}$ и, согласно следствию 6.1,

$$0 > \mathfrak{Im}(\sum_{i=1}^{g} (A_i \overline{B}_i)) = \mathfrak{Im}(\sum_{k=1}^{g} 2\pi \mathtt{i} x_i \sum_{k=1}^{g} x_k B_{ik}) = 2\pi \sum_{i,k} (\mathfrak{Re} B_{ij}) x_i x_k.$$

□

## 7. Билинейные соотношения Римана.

Согласно нашим определениям в каждой локальной карте $z : U \to \mathbb{C}$, где $z(p) = 0$ мероморфный дифференциал представляется в виде

$$\omega = f(z)dz = (c_k z^k + c_{k+1} z^{k+1} + ...)dz,$$

где $k$ — произвольное целое число. Рассмотрим маленький контур $c$ вокруг точки $p$, такой что контур $z(c)$ ориентирован против часовой стрелки. Число

$$\mathtt{Res}_p \omega = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{c} \omega = c_{-1}$$

называется *вычетом дифференциала $\omega$ в точке $p$.*

**Задача 7.1.** *Доказать, что мероморфный дифференциал на компактной поверхности имеет лишь конечное число полюсов, причем сумма вычетов по всем полюсам равна 0, если род поверхности положительный.*

**Теорема 7.1.** *Пусть $\omega$ — голоморфный, а $\omega'$ — мероморфный дифференциалы на римановой поверхности $P$ и $\mathfrak{B} = \{a_i, b_i | i = 1, ..., g\} \subset P$ — канонический базис циклов. Положим*

$$A_i = \oint\limits_{a_i} \omega, \quad B_i = \oint\limits_{b_i} \omega, \quad A'_i = \oint\limits_{a_i} \omega', \quad B'_i = \oint\limits_{b_i} \omega'.$$

*Пусть дифференциал $\omega'$ имеет единственный полюс и*

$$\omega' = (\frac{1}{z^n} + \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i) dz$$

*в некоторой локальной карте $z : U \to \mathbb{C}$. Рассмотрим представление*

$$\omega = (\sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j) dz$$

*дифференциала $\omega$ в этой локальной карте. Тогда*

$$\sum_{i=1}^{g} (A_i B'_i - A'_i B_i) = 2\pi i \frac{c_{n-2}}{n-1}.$$

**Теорема 7.2.** *Пусть $\omega$ — голоморфный, а $\omega'$ — мероморфный дифференциал на римановой поверхности $P$ рода $g$ и $\mathfrak{B} = \{a_i, b_i | i = 1, ..., g\} \subset P$ — канонический базис циклов. Положим*

$$A_i = \oint\limits_{a_i} \omega, \quad B_i = \oint\limits_{b_i} \omega, \quad A'_i = \oint\limits_{a_i} \omega', \quad B'_i = \oint\limits_{b_i} \omega'.$$

*Выберем точку $p_0 \in P - \mathfrak{B}$ и положим $f(p) = \int\limits_{l_p} \omega$, где $l_p \subset P - \mathfrak{B}$ — путь, с началом в $p_0$ и концом в $p$. Тогда, если $\omega'$ имеет лишь простые полюса, то*

$$\sum_{i=1}^{g} (A_i B'_i - A'_i B_i) = 2\pi i \sum_{p} f(p) \mathtt{Res}_p(\omega').$$

Теоремы 7.1 и 7.2 называются *билинейными соотношения Римана.* Их доказательство повторяет (с очевидными модификациями) доказательство теоремы 6.1.

## 8. Дивизоры.

Конечная формальная линейная комбинация

$$D = \sum_{i=1}^{k} n_i p_i$$

точек римановой поверхности $p_i \in P$ с целыми коэффициентами $n_i \in \mathbb{Z}$ называется *дивизором* на $P$. Дивизоры образуют модуль над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$.

*Степень дивизора*

$$\deg D = \sum_{i=1}^{k} n_i$$

образует линейный функционал на этом модуле. Дивизор называется *положительным* (обозначается $D > 0$), если все его коэффициенты $n_i$ положительны. Мы будем также писать $D_1 > D_2$, если $D_1 - D_2 > 0$.

*Дивизором мероморфной функции или дифференциала* $h$ с множеством нулей $p_1, ..., p_s$ и множеством полюсов $q_1, ..., q_t$ называется дивизор

$$(h) = \sum_{i=1}^{s} n_i p_i - \sum_{i=1}^{t} m_i p_i,$$

где $n_i$ (соответственно $m_i$) кратность нуля (соответственно полюса) функции или дифференциала $h$ в точке $p_i$ (соответственно $q_i$).

Дивизор мероморфной функции называется *главным дивизором.*

**Задача 8.1.** *Найти степень главного дивизора.*

Дивизоры, отличающиеся на главный дивизор называются *линейно эквивалентными.*

**Задача 8.2.** *Доказать, что степени линейно эквивалентных дивизоров совпадают.*

Дивизоры линейно эквивалентные положительному называются *эффективными.*

Дивизоры мероморфных дифференциалов образуют класс линейной эквивалентности $\mathcal{K}$, называемый *каноническим.*

**Задача 8.3.** *Используя теорему Римана-Гурвица, докажите, что* $\deg(\mathcal{K}) = 2g - 2$.

Обозначим через $R(D)$ множество мероморфных функций $f$ таких, что $(f) \geq D$. Положим $r(D) = \mathtt{dim}\, R(D)$.

Обозначим через $I(D)$ множество мероморфных дифференциалов $f$ таких, что $(f) \geq D$. Положим $i(D) = \mathtt{dim}\, I(D)$.

**Пример 8.1.** *Если $D > 0$, то $R(D) = \emptyset$ и $r(D) = 0$. Если $D = 0$, то $R(D)$ — это постоянные функции, $r(D) = 1$ и $i(D) = g$.*

**Теорема 8.1.** *Для любого дивизора $D$ выполнено $i(D) = r(D - \mathcal{K})$ и $i(D + (f)) = i(D)$, $r(D + (f)) = r(D)$, где $f$ — мероморфная функция.*

*Proof.* Рассмотрим мероморфный дифференциал $\omega$. Тогда соответствие $\omega' \mapsto \frac{\omega'}{\omega}$ задает изоморфизм между $I(D)$ и $R(D - (\omega))$ откуда $i(D) = r(D - \mathcal{K})$. Соответствие $f' \mapsto f'f$ задает изоморфизм между $R(D)$ и $R(D + (f))$.Аналогично $i(D + (f)) = i(D)$. □

## 9. Теорема Римана-Роха.

*Теорема Римана-Роха утверждает, что $r(-D) = \deg D + i(D) - g + 1$ для всех дивизоров $D$.*

**Лемма 9.1.** *$r(-D) = \deg D + i(D) - g + 1$, если и только если $r(-D) + \frac{1}{2}\deg(-D) = r(D - \mathcal{K}) + \frac{1}{2}\deg((D - \mathcal{K})$.*

*Proof.* Пусть $r(-D) = \deg D + i(D) - g + 1$. Тогда, согласно теореме 8.1 и задаче 8.3 находим, что $r(-D) + \frac{1}{2}\deg(-D) = \deg D + i(D) - g + 1 + \frac{1}{2}\deg(-D) = \frac{1}{2}\deg(D) + i(D) - \frac{1}{2}\deg(\mathcal{K}) = r(D-\mathcal{K}) + \frac{1}{2}\deg(D-\mathcal{K})$. Обратное утверждение доказывается аналогично. $\square$

С начала мы докажем несколько ее частных случаев. Мы уже знаем, в частности, что она верна для нулевого дивизора, поскольку $r(0) = 1$ и $i(0) = g$.

**Теорема 9.1.** *Если $D > 0$, то $r(-D) = \deg D + i(D) - g + 1$.*

*Proof.* Фиксируем на нашей римановой поверхности канонический базис циклов на поверхности $\{a_i, b_i | i = 1, ..., g\}$. Пусть $D = \sum\limits_{k=1}^{m} n_k p_k$, где $n_k > 0$. Согласно теореме 4.1 и задачам 4.5, 6.2 для каждой точки $p_k$ и $j > 1$ существует локальная карта $(U, z)$ и мероморфный дифференциал $\varphi_k^j$, имеющий в этой карте вид $\varphi_k^j = (\frac{1}{z^j} + \sum\limits_{s=0}^{\infty} a_s z^s)dz$, не имеющий других полюсов на всей поверхности и такой, что $\oint\limits_{a_i} \varphi_k^j = 0$ для всех $i$. Положим $B_{kl}^j = \oint\limits_{b_l} \varphi_k^j$ (здесь $k$— номер точки и соответствующего дифференциала, $l$— контур интегрирования, $j$— степень полюса дифференциала соответствующего дифференциала). Эти числа образуют матрицу

$$B = \left( \begin{array}{c} B_{11}^2 B_{11}^3 \dots B_{11}^{n_1+1} B_{21}^2 \dots B_{m1}^{n_m+1} \\ B_{12}^2 B_{12}^3 \dots B_{12}^{n_1+1} B_{22}^2 \dots B_{m2}^{n_m+1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ B_{1g}^2 B_{1g}^3 \dots B_{1g}^{n_1+1} B_{2g}^2 \dots B_{mg}^{n_m+1} \end{array} \right).$$

у которой строки отвечают контуру интегрирования, а столбцы — степени полюса дифференциала в каждой точке.

Нас будут интересовать решения $\{c_{-j}^k\}$ системы

$$\sum_{k=1}^{m} \sum_{j=2}^{n_k+1} c_{-j}^k B_{kl}^j = 0 \quad (l = 1, ..., g).$$

Как учит нас линейная алгебра, размерность пространства таких решений равна $\deg D - \rho$ решений, где $\deg D = \sum\limits_{k=1}^{m} n_k$ — число неизвестных, а $\rho$ — ранг матрицы $B$.

Докажем, что всякая функция из $R(-D)$ порождает решение системы. В выбранных нами локальных картах в окрестностях точек $p_k$ дифференциал функции $f \in R(-D)$ представляется в виде

$$df = \Big( \sum_{j=-n_k-1}^{\infty} c_j^k z^j \Big) dz = \Big( \sum_{j=2}^{n_k+1} c_{-j}^k z^{-j} + \sum_{j=0}^{\infty} c_j^k z^j \Big) dz,$$

поскольку $c_{-1}^k = 0$. Дифференциал $\varphi = df - \sum\limits_{k=1}^{m} \sum\limits_{j=2}^{n_k+1} c_{-j}^k \varphi_k^j$ голоморфен на всей поверхности и $\oint\limits_{a_i} \varphi = 0$ для всех $i$. Таким образом, согласно следствию 6.1, $\varphi = 0$, то есть $df = \sum\limits_{k=1}^{m}\sum\limits_{j=2}^{n_k+1} c^k_{-j}\varphi^j_k$. Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=2}^{n_k+1} c^k_{-j}B^j_{kl} = \oint\limits_{b_l}(\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=2}^{n_k+1} c^k_{-j}\varphi^j_k) = \oint\limits_{b_l} df = 0 \quad \text{для} \quad l = 1, ..., g.$$

Функции отличающиеся на константу порождают одинаковые решения.

С другой стороны, каждому решению системы отвечает непостоянный точный голоморфный дифференциал

$$\omega = \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=2}^{n_k+1} c^k_{-j}\varphi^j_k,$$

и, следовательно, определенная с точностью до константы функцию $f = \int\limits_{p_0}^{p}\omega \in R(-D)$.

Таким образом, размерность $\mathtt{dim}R(-D)$ равна размерности пространства решений системы $+1$, то есть $\mathtt{dim}R(-D) = \deg D - \rho + 1$.

Представим теперь матрицу $B$ с помощью билинейных соотношений Римана. Рассмотрим базис пространства голоморфных дифференциалов $\{\omega_1, ..., \omega_g\}$ такой что $\oint\limits_{a_i}\omega_j = \delta_{ij}$. Рассмотрим представления дифференциалов

$$\omega_l = \Big(\sum_{i=0}^{\infty}\alpha^k_{jl}z^j\Big)dz$$

в выбранных нами локальных картах в окрестностях точек $p_k$. Тогда, согласно теореме 7.1,

$$B^j_{kl} = 2\pi i\frac{\alpha^k_{l(j-2)}}{j-1} \quad \text{и} \quad B = \left(\begin{array}{c} \alpha^2_{11}\frac{\alpha^3_{11}}{2}\dots\frac{\alpha^{n_1+1}_{11}}{n_1}\alpha^2_{21}\dots\frac{\alpha^{n_m+1}_{m1}}{n_m} \\ \alpha^2_{12}\frac{\alpha^3_{12}}{2}\dots\frac{\alpha^{n_1+1}_{12}}{n_1}\alpha^2_{22}\dots\frac{\alpha^{n_m+1}_{m2}}{n_m} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha^2_{1g}\frac{\alpha^3_{1g}}{2}\dots\frac{\alpha^{n_1+1}_{1g}}{n_1}\alpha^2_{2g}\dots\frac{\alpha^{n_m+1}_{mg}}{n_m} \end{array}\right).$$

Строке отвечает коэффициенты разложения одного из дифференциалов в каждой из точек дивизора. Столбцу отвечают коэффициенты различных дифференциалов при одинаковых степенях в одинаковых точках. Поэтому линейная комбинация строк дает нулевую строку, если и только если соответствующая линейная комбинация дифференциалов $\omega_i$ принадлежит $I(D)$. Таким образом, размерность пространства решений — это $\mathtt{dim}I(D) = g - \rho$. Откуда $r(-D) = \deg D + i(D) - g + 1$. □

Из этой теоремы и теоремы 8.1 следует

**Следствие 9.1.** *$r(-D) = \deg D + i(D) - g + 1$, если $D$ — эффективный дивизор.*

**Теорема 9.2.** *$r(-D) = \deg D + i(D) - g + 1$ для любого дивизора $D$.*

*Proof.* Если $r(-D) > 0$, то $(f) + D > 0$ для $f \in R(-D)$, Следовательно $D$ — эффективный дивизор и теорема Римана-Роха верна согласно следствию 9.1. Ввиду предыдущей леммы теорема верна и в случае $r(D - \mathcal{K}) > 0$.

Пусть теперь $r(-D)=0$, $r(D-\mathcal{K})=0$. Пусть $D=D_+-D_-$, где $D_+,D_->0$.

Предположим, что $\deg D\geq g$. Тогда, как уже доказано,

$$r(-D_+)\geq \deg D_+-g+1=\deg D+\deg D_- -g+1\geq 1+\deg D_-.$$

Таким образом $R(-D_+)$ содержит $1+\deg D_-$ линейно независимых функций. Рассматривая их линейные комбинации можно найти функцию $f\in R(-D_+)$, с дивизором нулей $\deg D_-$. Но тогда $f\in R(-D)$, что противоречит условию $r(-D)=0$.

Следовательно, $\deg D<g$. Аналогично (см. лемму 9.1), $\deg(\mathcal{K}-D)<g$, откуда $\deg(D)>2g-2-g=g-2$. Таким образом, $\deg(D)=g-1$, что вместе с $i(D)=r(D-\mathcal{K})=0$, дает теорему Римана-Роха. □

## 10. Точки Вейерштрасса.

Теорема Римана-Роха позволяет оценить число линейно независимых функций с предписанными особенностями. Согласно теореме Римана-Роха $r(-D)>1$ при $\deg D>g$. Найдем верхнюю оценку на число функций.

**Лемма 10.1.** *Если $g>0$, то $i(p)=g-1$ для любой точки $p\in P$. Если $D>0$, и $g=0$, то $r(-D)=\deg D+1$. Если $D>0$, и $g>0$, то $r(-D)<\deg D+1$.*

*Proof.* Если $i(p)\geq g$, то $r(-p)\geq 1+g-g+1=2$ и существует функция с единственным простым полюсом, что возможно лишь при $g=0$ (задача 7.1). Таким образом, $i(p)<g$ при $g>0$. С другой стороны $i(p)=r(-p)-1+g-1\geq g-1$ и следовательно $i(p)=g-1$ при $g>0$.

Если $g=0$ и $D>0$, то $i(D)=0$ откуда $r(-D)=\deg D+1$. Пусть теперь $g>0$, $D>0$ и $p\in D$. Тогда $I(D)\subset I(p)$, и следовательно $i(D)\leq i(p)=g-1$, откуда $r(-D)<\deg D+1$. □

**Теорема 10.1.** *На поверхности рода $g>0$, для любого $1\leq j\leq g$, существуют попарно различные точки $p_1,...,p_j$ такие что $i(\sum\limits_{k=1}^{j}p_k)=g-j$. Кроме того, на поверхности рода $g>0$ существуют $g$ попарно различных точек $p_1,...,p_g$ таких что $r(-\sum\limits_{k=1}^{g}p_k)=1$.*

*Proof.* Докажем первое утверждение, используя индукцию по $j$. Для $j=1$ это утверждение доказано в лемме 10.2. Пусть утверждение доказано для $j=n<g$, то есть пусть существуют попарно различные точки $p_1,...,p_n$ такие что $i(\sum\limits_{k=1}^{n}p_k)=g-n$. Тогда существует ненулевой дифференциал $\omega\in I(\sum\limits_{k=1}^{n}p_k)$ и точка $p_{n+1}$, где $\omega(p_{n+1})\neq 0$. Следовательно $\omega$ не принадлежит $I(\sum\limits_{k=1}^{n+1}p_k)$. Таким образом $i(\sum\limits_{k=1}^{n+1}p_k)<g-n$. С другой стороны, $i(\sum\limits_{k=1}^{n+1}p_k)=r(-\sum\limits_{k=1}^{n+1}p_k)+g-1-(n+1)\geq g-(n+1)$. Таким образом, $i(\sum\limits_{k=1}^{n+1}p_k)=g-(n+1)$. Второе утверждение теоремы следует из первого и теоремы Римана-Роха. □

Из доказательства последней теоремы видно, что свойство $r(-\sum_{k=1}^{g} p_k) = 1$ выполняется для любого набора точек $p_1, ..., p_g$ общего положения. Произвольные наборы точек для которых $r(-\sum_{k=1}^{g} p_k) > 1$ будут обсуждаться в дальнейшем. Тут мы ограничимся лишь специальными дивизорами такого типа.

Точка $p$ на поверхности рода $g$ называется *точкой Вейерштрасса*, если $r(-gp) > 1$.

**Лемма 10.2.** *Пусть $z$ — локальная карта на римановой поверхности $P$, такая что $z(p) = 0$ и $\omega_i = \varphi_i(z)dz \quad (i = 1, ..., g)$ — базис пространства голоморфных дифференциалов на $P$. Положим*

$$W(z) = \det \begin{pmatrix} \varphi_1(z) & \varphi_1'(z) & ... & \varphi_1^{(g-1)}(z) \\ ... & ... & ... & ... \\ \varphi_g(z) & \varphi_g'(z) & ... & \varphi_g^{(g-1)}(z) \end{pmatrix}.$$

*Тогда точка $p$ является точкой Вейерштрасса, если и только если $W(0) = 0$.*

*Proof.* Согласно теореме Римана-Роха, условие $r(-gp) > 1$ эквивалентно условию $i(gp) > 0$, то есть существованию голоморфного дифференциала с нулем порядка $g$ в точке $p$. Такой дифференциал $\omega = \sum_{i=1}^{g} \lambda_i \omega_i$ существует если и только если $W(0) = 0$.
□

**Задача 10.1.** *При замене локальной карты $z = z(u)$ функция $W$ меняется по закону $\tilde{W}(u) = (\frac{dz}{du})^N W(z)$, где $N = \frac{g(g+1)}{2}$.*

Кратность нуля функции $W$ в точке 0 называется *весом* точки Вейерштрасса.

**Задача 10.2.** *Докажите что вес точки Вейерштрасса не зависит от выбора базиса $\{\varphi_i\}$.*

**Теорема 10.2.** *Суммарный вес точек Вейерштрасса на римановой поверхности рода $g$ равен $(g-1)g(g+1)$.*

*Proof.* Согласно предыдущей задаче, функция $f(z) = \frac{W(z)}{(\varphi_1(z))^N}$ не зависит от выбора локальной карты и, следовательно, порождает мероморфную функцию на $P$. Ее степень равна степени дивизора нулей и степени дивизора полюсов функции $f$. Степень дивизора нулей — это суммарный вес точек Вейерштрасса. Степень дивизора полюсов равна степени дивизора нулей тензора $(\varphi_1(z))^N$, которая, согласно задачам 8.3 и 10.2 равна $(2g-2)N = (g-1)g(g+1)$. □

**Задача 10.3.** *(Теорема Гурвица) Используя теорему 10.2 и теорему Римана-Гурвица доказать, что порядок группы автоморфизмов римановой поверхности рода $g > 1$ не превосходит $84(g-1)$. (Подсказка: Рассмотреть факторизацию поверхности под действием группы автоморфизмов и применить формулу Римана-Гурвица, заменив суммирование по критическим точкам на суммирование по критическим значениям.)*

Число $a$ называется *пробелом в точке $p$* римановой поверхности $P$, если на $P$ **не существует** мероморфной функции с дивизором полюсов $ap$.

**Теорема 10.3.** *В любой точке поверхности рода $g > 0$ существует ровно $g$ пробелов и все они не превосходят $2g-1$.*

*Proof.* Число $r(-kp)$ не убывает с ростом $k$, причем, согласно теореме Римана-Роха, $r(-(k+1)p) - r(-kp) = i((k+1)p) - i(kp) + 1 \leq 1$. Кроме того $r(-p) = 1$ и $r(-(2g-1)p) = 2g - 1 + i((2g-1)p) - g + 1 = g$, поскольку $\deg(\mathcal{K}) = 2g-2$. Таким образом, в интервале $1 \leq k \leq 2g-1$ функция $r(-kp)$ возрастает ровно $g-1$ раз и, следовательно не возрастает ровно $g$ раз. Если $k \geq 2g$, то, согласно теореме Римана-Роха, $r(-kp) = k - g + 1 > 1$, то есть функции с дивизором полюсов $kp$ существуют. $\square$

**Задача 10.4.** *Доказать, что вес точки Вейерштрасса равен* $\sum\limits_{i=1}^{g}(a_i - i)$, *где* $a_1 < a_2 <, ..., < a_g$ *— ее пробелы.*

**Задача 10.5.** *Найти точки Вейерштрасса и их пробелы для гиперэллиптической римановой поверхности.*

**Задача 10.6.** *Доказать, что риманова поверхность рода* $g > 1$ *имеет не менее* $2g+2$ *точек Вейерштрасса.*

## 11. $\theta$-функции.

Симметрическую $g \times g$ матрицу $B = \{B_{ij}\}$ с отрицательно определенной вещественной частью называется *римановой.*

*$\theta$-функцией, ассоциированной с римановой матрицей $B$* называется функция $\theta : \mathbb{C}^g \to \mathbb{C}$, где

$$\theta(z) = \theta(z|B) = \sum_{N \in \mathbb{Z}^g} \exp\left(\frac{1}{2} < BN, N > + < N, z >\right)$$

и $z = (z_1, ..., z_g)$, $N = (N_1, ..., N_g)$, $< N, z >= \sum\limits_{i=1}^{g} N_i z_i$, $< BN, N >= \sum\limits_{i,j=1}^{g} B_{ij} N_i N_j$.

**Лемма 11.1.** *Ряд $\theta(z)$ абсолютно сходится на любом компакте пространства $\mathbb{C}^n$.*

*Proof.* Рассмотрим наибольшее собственное значение $-b$ матрицы $B$. Тогда $\mathfrak{Re}(< BN, N >) \leq -b < N, N >$ и следовательно

$$\left|\exp\left\{\frac{1}{2} < BN, N > + < N, z >\right\}\right| \leq \exp\left\{-\frac{b}{2}\sum_{i=1}^{g} N_i^2 + \sum_{i=1}^{g} N_i \tilde{z}_i\right\} = \prod_{i=1}^{g} \exp\left\{-\frac{b}{2}N_i^2 + N_i \tilde{z}_i\right\},$$

где $\tilde{z} = \mathfrak{Re}(z)$.

Таким образом,

$$|\theta(z)| = \Big|\sum_{N \in \mathbb{Z}^g} \exp\left\{\frac{1}{2} < BN, N > + < N, z >\right\}\Big| \leq \sum_{N \in \mathbb{Z}^g} \Big(\prod_{i=1}^{g} \exp\Big\{-\frac{b}{2}N_i^2 + N_i \tilde{z}_i\Big\}\Big) =$$

$$= \prod_{i=1}^{g} \Big(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\Big\{-\frac{b}{2}n^2 + n\tilde{z}_i\Big\}\Big).$$

Следовательно

$$|\theta(z)| \leq \Big(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\Big\{-\frac{b}{2}n^2 + cn\Big\}\Big)^g = \mathrm{const}\Big(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\Big\{-\frac{b}{2}(n - \frac{c}{b})^2\Big\}\Big)^g \quad \text{при} \quad |z_i| \leq c.$$

Сходимость ряда

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\{-\frac{b}{2}(n-\frac{c}{b})^2\}$$

следует из сходимости интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-\frac{b}{2}(x-\frac{c}{b})^2\}dx,$$

которая эквивалентна сходимости интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-x^2\}dx.$$

Таким образом, ряд $\theta_B(z)$ равномерно сходится на $\{z \in \mathbb{C}^n || \mathfrak{Re}(z_i)| \le c\}$ при любом $c$. $\square$

**Лемма 11.2.** $\theta(z + 2\pi\boldsymbol{i}e_k) = \theta(z)$; $\theta(z + f_k) = \exp(-\frac{1}{2}B_{kk} - z_k)\theta(z)$.

*Proof.* Первое равенство очевидно. Положим $N = M - e_k$. Тогда

$$\theta(z + f_k) = \sum_{N\in\mathbb{Z}^g} \exp(\frac{1}{2} < BN, N > + < N, z + f_k >) =$$

$$\sum_{N\in\mathbb{Z}^g} \exp(\frac{1}{2} < B(M-e_k), (M-e_k) > + < (M-e_k), z + f_k >) =$$

$$\sum_{M\in\mathbb{Z}^g} \exp(\frac{1}{2} < BM, M > - < M, Be_k > + \frac{1}{2} < Be_k, e_k > +$$

$$< M, z > + < M, f_k > - < e_k, z > - < e_k, f_k >) =$$

$$\exp(-\frac{1}{2}B_{kk} - z_k) \sum_{M\in\mathbb{Z}^g} \exp(\frac{1}{2} < BM, M > + < M, z >) = \exp(-\frac{1}{2}B_{kk} - z_k)\theta(z).$$

$\square$

**Задача 11.1.** *Доказать, что*

$$\theta(z + 2\pi\boldsymbol{i}N + BM|B) = \exp(-\frac{1}{2} < BM, M > - < M, z >)\theta(z|B)$$

*для любых целых векторов* $N, M \in \mathbb{Z}^g$.

Множество

$$\{2\pi\mathtt{i}N + BM | N, M \in \mathbb{Z}^g\}$$

называется *решеткой квазипериодов* $\theta$*-функции* $\theta(z|B)$.

Нетрудно доказать, что голоморфных на $\mathbb{C}^g$ функций с $2g$ независимыми периодами не существует. Их роль в комплексном анализе играют максимально похожие на них квазипериодические функции $\theta$-функции.

$\theta$-функции имеют естественные обобщения: $\theta$*-функции с характеристиками* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^g$. Они также квазипериодичны и также часто используются в приложениях. По определению

$$\theta[\alpha, \beta](z|B) = \exp(\frac{1}{2} < B\alpha, \alpha > + < \alpha, z + 2\pi\mathtt{i}\beta >)\theta(z + B\alpha + 2\pi\mathtt{i}\beta).$$

В частности $\theta[N, M](z|B) = \theta(z|B)$ при $N, M \in \mathbb{Z}^g$. Достаточно рассматривать, таким образом, $\theta$-функции с характеристиками $0 \le \alpha, \beta < 1$.

**Задача 11.2.** *Доказать, что*

$$\theta[\alpha, \beta](z|B) = \sum_{N \in \mathbb{Z}^g} \exp(\frac{1}{2} < B(N+\alpha), N+\alpha > + < z + 2\pi \boldsymbol{i}\beta, N+\alpha >).$$

**Задача 11.3.** *Доказать, что*

$$\theta[\alpha, \beta](z + 2\pi \boldsymbol{i} N + BM|B) =$$

$$= \exp(-\frac{1}{2} < BM, M > - < z, M > + 2\pi \boldsymbol{i}(< \alpha, N > - < \beta, M >))\theta[\alpha, \beta](z|B).$$

Особенно важны $\theta$-функций с характеристиками, координаты которых принимают значения 0 и $\frac{1}{2}$. Такие $\theta$-характеристики называются полупериодами. Они называются *четными* или *нечетными* в зависимости от четности числа $4 < \alpha, \beta >$

**Задача 11.4.** *Доказать, что четность полупериода $[\alpha, \beta]$ совпадает с четностью соответствующей $\theta$-функции $\theta[\alpha, \beta]$. Найти число четных и нечетных полупериодов.*

$\theta$-функций порядка $n$ с характеристиками $[\alpha, \beta]$ называется голоморфная функция на $\mathbb{C}^g$, с условием квазипериодичности

$$\theta[\alpha, \beta](z + 2\pi \mathtt{i} N + BM|B) =$$

$$= \exp(-\frac{n}{2} < BM, M > -n < z, M > + 2\pi \mathtt{i}(< \alpha, N > - < \beta, M >))\theta[\alpha, \beta](z|B).$$

**Задача 11.5.** *Докажите, что $\theta$-функций порядка $n$ с характеристиками $[\alpha, \beta]$ порождают векторное пространств размерности $n^g$. Причем в качестве базиса этого пространства можно взять функции*

$$\theta[\frac{\alpha + \gamma}{n}, \beta](nz|nB).$$

## 12. Абелевы торы и теорема Абеля.

**Лемма 12.1.** *Пусть $B = \{B_{ij}\}$ — риманова матрица. Тогда векторы*

$$2\pi \boldsymbol{i} e_k = 2\pi \boldsymbol{i} \begin{pmatrix} 0 \\ ... \\ 1 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f_l = Be_l = \begin{pmatrix} B_{l1} \\ ... \\ B_{lg} \end{pmatrix} \quad k, l = 1, \ldots, g$$

*линейно независимы над $R$.*

*Proof.* Выделяя в равенстве $2\pi \mathtt{i} \sum_{k=1}^{g} \lambda_k e_k + \sum_{k=1}^{g} \mu_k f_k = 0$ ($\lambda_k, \mu_k \in R$) вещественную часть, находим, что $B(\sum_{k=1}^{g} \mu_k e_k) = \sum_{k=1}^{g} \mu_k f_k = 0$. Таким образом $\mathfrak{Re} B(\sum_{k=1}^{g} \mu_k e_k) = 0$ откуда, в виду невырожденности $\mathfrak{Re} B$, $\sum_{k=1}^{g} \mu_k e_k = 0$. Следовательно $\mu_1 = ... = \mu_g = 0$, а значит и $\lambda_1 = ... = \lambda_g = 0$. □

Согласно лемме 12.1 векторы

$$2\pi \mathtt{i} e_k, \quad f_l \quad (k, l = 1, \ldots, g),$$

ассоциированные с матрицей Римана $\{B_{lj}\}$ порождают решетку $\Gamma \subset C^g = R^{2g}$ ранга $2g$. Фактор-пространство $T^{2g} = C^g/\Gamma$ называется *абелевым тором.* Обозначим через $J_B : C^g \to T^{2g}$ естественную проекцию. Для векторов $V_1, V_2 \in C^g$ будем писать, также $V_1 \equiv V_2$, если $J_B(V_1) = J_B(V_2)$.

Можно доказать. что абелев тор является алгебраическим многообразием, то есть задается алгебраическими уравнениями в некотором проективном пространстве. Более того, можно доказать, что любой алгебраический тор описывается римановой матрицей. $\theta$-функции как раз и задают вложение тора $T^{2g}$ в виде алгебраического многообразия.

Мероморфные функции на абелевом торе называются *абелевыми функциями.* Абелевой функцией является например отношение двух $\theta$-функций одинакового порядка с одинаковыми $\theta$-характеристиками. Можно доказать, что так получаются все абелевы функции.

Разные римановы матрицы могут задавать одинаковые абелевы торы.

**Задача 12.1.** *Доказать, что римановы матрицы $B$ и $B'$ порождают одинаковые абелевы торы если и только если существует матрица вида $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ такая, что $B' = 2\pi \boldsymbol{i}(aB + 2\pi \boldsymbol{i} b)(cB + 2\pi \boldsymbol{i} d)^{-1}$. Доказать, что в этом случае $\theta[\alpha', \beta'](z'|B') = const\sqrt{M} \exp\{\frac{1}{2}\sum_{i\leq j} z_i z_j \frac{\partial \ln \det M}{\partial B_{ij}}\}\theta[\alpha, \beta](z|B)$, где $M = cB + 2\pi \boldsymbol{i} d$, $z = \frac{1}{2\pi \boldsymbol{i}} z' M$ и $[\alpha', \beta'] = [\alpha, \beta] \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} + diag[cd^t, ab^t]$*

Рассмотрим теперь риманову поверхность $P$, канонический базис циклов на $P$ и отвечающий ему базис пространства голоморфных дифференциалов $\{\omega_i\}$. Согласно теореме 6.2 они порождают риманову матрицу периодов $B$. Абелев тор, порожденный матрицей $B$ называется *якобианом $J(P)$ римановой поверхности $P$.*

**Задача 12.2.** *Доказать, что якобиан $J(P)$ не зависит об выбора канонического базиса циклов на $P$.*

Можно доказать, что матрица Якоби однозначно определяет риманову поверхность (теорема Торелли). При $g = 1, 2, 3$ любая риманова матрица является якобианом некоторой римановой поверхности. При $g > 3$ якобианы образуют $3g - 3$-мерное множество в $\frac{g(g+1)}{2}$-мерном (комплексном) пространстве всех римановых матриц. Важная для приложений проблема описания этого подмножества называется проблемой Шоттки.

Зафиксируем произвольную точку $p_0 \in P$. Рассмотрим отображение

$$A = A_{p_0} : p \mapsto (\int_{p_0}^{p} \omega_1, ..., \int_{p_0}^{p} \omega_g) \in \mathbb{C}^g$$

на рассеченной поверхности $P \setminus \{a_i, b_i\}$.

**Задача 12.3.** *Докажите, что отображение $\tilde{A} = \tilde{A}_{p_0} = J_B A : P \to J(P)$ продолжается на всю поверхность $P$.*

**Задача 12.4.** *Как меняется отображение $\tilde{A}$ при замене циклов $\{a_i, b_i\}$.*

Отображение $\tilde{A} : P \to J(P)$ называется *отображением Абеля*. Равенство $\tilde{A}(D) = \sum\limits_i n_i \tilde{A}(p_i) \in J(P)$ продолжает его на произвольный дивизор $D = \sum\limits_i n_i p_i$.

**Теорема 12.1.** *(теорема Абеля) Дивизор $D = \sum\limits_{i=1}^n p_i - \sum\limits_{i=1}^n q_i, \quad p_i, q_i \in P$ является главным, если и только если $A(D) \equiv 0$.*

*Proof.* Пусть $D = \sum\limits_{i=1}^n p_i - \sum\limits_{i=1}^n q_i$ — дивизор мероморфной функции $f$. Периоды мероморфного дифференциала $\omega = d \ln f$ кратны $2\pi\mathtt{i}$, то есть

$$\oint\limits_{a_k} \omega = 2\pi\mathtt{i} n_k \quad \text{и} \quad \oint\limits_{b_k} \omega = 2\pi\mathtt{i} m_k, \quad \text{где} \quad n_k, m_k \in \mathbb{Z}.$$

С другой стороны, дифференциал $\omega$ представляется в виде суммы

$$\omega = \sum_{i=1}^n \tilde{\omega}_i + \sum_{j=1}^g c_j \omega_j,$$

где $\tilde{\omega}_i$ — мероморфный дифференциал, голоморфный вне полюсов $p_i, q_i$, с вычетами 1, -1 в точках $p_i$, $q_i$ соответственно и такой, что $\oint\limits_{a_j} \tilde{\omega}_i = 0$ для всех $j$. В частности, $\oint\limits_{a_k} \omega = 2\pi\mathtt{i} c_k$ и $c_k = n_k$.

Применив билинейное соотношение Римана

$$\sum_{j=1}^g (A_j B'_j - A'_j B_j) = 2\pi i \sum_p (\int\limits_{p_0}^p \omega) \mathtt{Res}_p(\omega').$$

к паре дифференциалов $(\omega_k, \tilde{\omega}_i)$ находим, что

$$2\pi i \oint\limits_{b_k} \tilde{\omega}_i = 2\pi i \int\limits_{q_i}^{p_i} \omega_k.$$

Таким образом

$$\oint\limits_{b_k} \omega = \sum_{i=1}^n \oint\limits_{b_k} \tilde{\omega}_i + \sum_{j=1}^g n_j B_{jk} = \sum_{i=1}^n \int\limits_{q_i}^{p_i} \omega_k + \sum_{j=1}^g n_j B_{jk}.$$

Следовательно, координата $k$ разности

$$(A(\sum_{i=1}^n (p_i)) - A(\sum_{i=1}^n (q_i)))_k = \sum_{i=1}^n \int\limits_{q_i}^{p_i} \omega_k$$

равна

$$2\pi\mathtt{i} m_k - \sum_{j=1}^g n_j B_{jk}.$$

Таким образом, разность $A(\sum\limits_{i=1}^{n}(p_i)) - A(\sum\limits_{i=1}^{n}(q_i))$ принадлежит решетке квазипериодов и $A(D) \equiv 0$.

Пусть теперь $A(D) \equiv 0$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{q_i}^{p_i} \omega_k = 2\pi \mathtt{i} m_k - \sum_{j=1}^{g} n_j B_{jk}.$$

для некоторых целых чисел $n_k, m_k$. Рассмотрим дифференциал

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} \tilde{\omega}_i + \sum_{j=1}^{g} n_j \omega_j.$$

Согласно билинейным соотношениям Римана,

$$\oint_{b_k} \omega = \sum_{i=1}^{n} \int_{q_i}^{p_i} \omega_k + \sum_{j=1}^{g} n_j B_{jk} = 2\pi \mathtt{i} m_k.$$

Поэтому функция $\exp(\int\limits_{p_0}^{p} \omega)$ будет мероморфной функцией с дивизором $D$. $\square$

## 13. Задача обращения Якоби.

Задача обращения Якоби состоит в описании положительного дивизора $D = \sum\limits_{i=1}^{g} p_i \in S^g P$, переходящего при отображении Якоби $A_{p_0}$ в предписанную точку якобиана $\tilde{\xi} \in J(P)$.

Для решения задачи обращения Якоби нам понадобится функция

$$F(p) = F_e(p) = \theta(A_{p_0}(p) - e).$$

В этой формуле $\theta(z) = \theta(z|B)$ — $\theta$-функция поверхности $P$, отвечающая базису $\{a_i, b_i\}$, $e \in \mathbb{C}^g$ и $A(p) = A_{p_0}(p) = \begin{pmatrix} \int\limits_{p_0}^{p} \omega_1 \\ \dots \\ \int\limits_{p_0}^{p} \omega_g \end{pmatrix}$, где интегралы берутся по путям, не пересекающим циклы $\{a_i, b_i\}$.

**Задача 13.1.** *Доказать, что дивизор нулей функции $F_e$ зависит лишь от классов гомологий циклов $\{a_i, b_i\}$.*

**Лемма 13.1.** *Множество нулей функции $F(p)$ или совпадает со всей поверхностью, или образует дивизор степени $g$.*

*Proof.* Разрезая поверхность $P$ по циклам $\{a_i, b_i\}$, получаем $4g$- угольник $\Gamma$ со сторонами $a_1, b_1, a_1^{-1}, b_1^{-1}, a_1, b_1, a_1^{-1}, b_1^{-1}, \dots, a_g, b_g, a_g^{-1}, b_g^{-1}$. Обозначим через $A^+$

и $A^-$ ограничение функции $\begin{pmatrix} \int\limits_{p_0}^{p} \omega_1 \\ \dots \\ \int\limits_{p_0}^{p} \omega_g \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^g$ на множества $\{a_1, b_1, ..., a_g, b_g\}$ и $\{a_1^{-1}, b_1^{-1}, ..., a_g^{-1}, b_g^{-1}\}$ соответственно.

Положим

$$F^+ = F|_{\{a_1,b_1,...,a_g,b_g\}} \quad \text{и} \quad F^- = F|_{\{a_1^{-1},b_1^{-1},...,a_g^{-1},b_g^{-1}\}}.$$

На цикле $b_k$ имеем

$$A_j^+(p) = A_j^-(p) + 2\pi\mathtt{i}\delta_{jk}, \text{ откуда } d\ln F^-(p) = d\ln F^+(p).$$

На цикле $a_k$ имеем $A_j^-(p) = A_j^+(p) + B_{jk}$ и, следовательно,

$$\ln F^-(p) = \ln(\theta(A^-(p) - e)) = \ln(\theta(A^+(p) - e + B_k)) =$$

$$\ln(\exp(-\frac{1}{2}B_{kk} - A_k^+(p) + e_k)\theta(A^+(p) - e))) = -\frac{1}{2}B_{kk} - A_k^+(p) + e_k + \ln F^+(p),$$

откуда

$$d\ln F^-(p) = d\ln F^+(p) - \omega_k.$$

Таким образом, если $F$ — ненулевая функция, то число ее нулей равно

$$\frac{1}{2\pi\mathtt{i}}\oint\limits_{\partial\Gamma} d\ln F(p) = \frac{1}{2\pi\mathtt{i}}\sum_{k=1}^{g}(\oint\limits_{a_k} + \oint\limits_{b_k})[d\ln F^+(p) - d\ln F^-(p)] = \frac{1}{2\pi\mathtt{i}}\sum_{k=1}^{g}\oint\limits_{a_k}\omega_k = g.$$

□

Каноническому базису циклов $\{a_i, b_i\}$ отвечает *вектор римановых констант*

$$K = K_{p_0} = \begin{pmatrix} K_1 \\ \dots \\ K_g \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^g,$$

где

$$K_j = \frac{2\pi\mathtt{i} + B_{jj}}{2} - \frac{1}{2\pi\mathtt{i}}\sum_{\substack{1 \le l \le g \\ l \ne j}}(\oint\limits_{a_l}\omega_l(p)\int\limits_{p_0}^{p}\omega_j).$$

**Теорема 13.1.** *(теорема Римана о нулях) Пусть $p_1, ..., p_g$ — множество всех нулей функции $F_e$. Тогда*

$$A(\sum_{i=1}^{g} p_i) \equiv e - K,$$

*где $K$ — вектор римановых констант.*

*Proof.* Интеграл

$$\xi_j = \frac{1}{2\pi\mathtt{i}}\oint\limits_{\partial\tilde{\Gamma}}(A_j(p))d\ln F(p)$$

равен сумме вычетов подынтегрального выражения, то есть

$$\xi_j = A_j(\sum_{i=1}^{g} p_i).$$

С другой стороны,

$$\xi_j = \frac{1}{2\pi\mathtt{i}}\sum_{k=1}^{g}(\oint\limits_{a_k} + \oint\limits_{b_k})(A_j^+ d\ln F^+ - A_j^- d\ln F^-) = \frac{1}{2\pi\mathtt{i}}\sum_{k=1}^{g}\oint\limits_{a_k}[A_j^+ d\ln F^+ -$$

$$(A_j^+ + B_{jk})(d\ln F^+ - \omega_k)] + \frac{1}{2\pi\mathtt{i}}\sum_{k=1}^{g}\oint\limits_{b_k}[A_j^+ d\ln F^+ - (A_j^+ - 2\pi\mathtt{i}\delta_{jk})d\ln F^+] =$$

$$\frac{1}{2\pi\mathtt{i}}\sum_{k=1}^{g}(\oint\limits_{a_k} A_j^+\omega_k - B_{jk}\oint\limits_{a_k} d\ln F^+ + 2\pi\mathtt{i}B_{jk}) + \oint\limits_{b_j} d\ln F^+.$$

Кроме того,

$$\oint\limits_{a_k} d\ln F^+ = 2\pi\mathtt{i}n_k, \quad \text{где} \quad n_k \in \mathbb{Z}$$

и

$$\oint\limits_{b_j} d\ln F^+ = \ln F^+(q^+) - \ln F^+(q^-) + 2\pi\mathtt{i}m =$$

$$\ln\theta(A(q^-) + B_j - e) - \ln\theta(A(q^-) - e) + 2\pi\mathtt{i}m = -\frac{1}{2}B_{jj} + e_j - A_j(q^-) + 2\pi\mathtt{i}m,$$

где $q^-, q^+]$ — отрезок, отвечающий контуру $b_k$ и $m \in \mathbb{Z}$.

Кроме того,

$$A_j\omega_j = \frac{1}{2}d(A_j^2),$$

откуда

$$\oint\limits_{a_j} A_j\omega_j = \frac{1}{2}(A_j^2(p^-) - A_j^2(\tilde{q})) = \frac{1}{2}(A_j^2(q^-) - (A_j(q^-) - 2\pi\mathtt{i})^2) = \frac{1}{2}(4\pi\mathtt{i}A_j(q^-) - (2\pi\mathtt{i})^2),$$

где $[\tilde{q}_k^+, q_k^-]$ — отрезок, отвечающий контуру $a_k^+$.

Таким образом

$$\frac{1}{2\pi\mathtt{i}}\sum_{k=1}^{g}\oint\limits_{a_k} A_j^+\omega_k = \frac{1}{2\pi\mathtt{i}}\sum_{1\le k\le g, k\ne j}^{g}\oint\limits_{a_k} A_j^+\omega_k + A_j(q^-) - \pi\mathtt{i},$$

откуда

$$\xi_j = e_j - \frac{1}{2}B_{jj} + \frac{1}{2\pi\mathtt{i}}\sum_{1\le k\le g, k\ne j}^{g}\oint_{a_k} A_j^+\omega_k - \pi\mathtt{i}.$$

□

Из теоремы Римана о нулях следует, что $A(S^g)$ совпадает с якобианом поверхности $S$. Покажем, что почти во все точки переходит лишь одна точка симметрической степени $A(S^g)$.

Согласно теореме Римана-Роха $r(-D) \geq 1+\deg D - g$ и, следовательно, для любого положительного дивизора $D$ степени больше $g$ существует мероморфная функция, для которой $D$ — дивизор полюсов. Положительный дивизор $D$ степени $g$ называется *специальным*, если существует мероморфная функция, для которой $D$ — дивизор полюсов, и называется *неспециальным* в противном случае. Дивизор $gp$, например, специален, если и только если $p$ — точка Вейерштрасса.

**Лемма 13.2.** *Отображение Абеля симметрической степени римановой поверхности $\tilde{A} : S^g P \to J(P)$ обратимо в окрестности неспециального дивизора, состоящего из $g$ попарно различных точек.*

*Proof.* Если $D$ и $D'$ — положительные дивизоры и $A(D') \equiv A(D)$, то по теореме Абеля $D' = D + (f)$. Таким образом, $D = D'$, если $D$ — неспециальный дивизор. Предположим, что неспециальный дивизор $D = \bigcup p_k$ состоит из попарно различных точек. Рассмотрим локальные карты $z_k$ и базисные дифференциалы $\omega_i = \varphi_{ik}(z_k)dz_k$ в окрестностях этих точек. Якобиан отображения Абеля в точке $D$ совпадает с определителем матрицы $\begin{pmatrix} \varphi_{11} & \cdots & \varphi_{1g} \\ ... & ... & ... \\ \varphi_{g1} & \cdots & \varphi_{gg} \end{pmatrix}$. Этот определитель не 0, поскольку в противном случае строки матрицы линейно зависимы, откуда $i(D) > 0$ и, согласно теореме Римана-Роха, $r(-D) > 1$. Следовательно, якобиан отображения Абеля не равен 0 и в окрестности дивизора $D$. □

Можно доказать также (см. например Ф.Гриффиес, Дж.Харрис, Принципы алгебраической геометрии 1, М. Мир 1982) следующие утверждения, принадлежащее Б.Риману.

**Теорема 13.2.** *Функция $F_e(p) = \theta(A_{p_0}(p) - e)$ тождественно равна нулю, если и только если $e \equiv K + A(D)$, где $D$ — специальный дивизор. Кроме того $2K \equiv -A(\mathcal{K})$, где $\mathcal{K}$ — канонический класс и $\{\zeta \in \mathbb{C}^g | \theta(\zeta) = 0\} \equiv A(S^{g-1}P) + K$*

## 14. Функция Бейкера-Ахиезера.

Функция Бейкера-Ахиезера $\psi : P \to \bar{\mathbb{C}}$ — это аналог экспоненты от многочлена для римановой поверхности $P$ произвольного рода $g$. Она была детально исследована и использована для использована для решения различных проблем математики в работах И.М. Кричевера. Функция Бейкера-Ахиезера зависит от:

- точки $p_0 \in P$;
- локальной карты $k : U \to \overline{\mathbb{C}}$ в окрестности этой точки, где $k(p) = \infty$;
- положительного неспециального дивизора $D \in P \setminus p_0$ степени $g$ общего положения;
- многочлена положительной степени $q(k) = q_0 + q_1 k + ... + q_n k^n$ общего положения.

*Функцией Бейкера-Ахиезера* называется функция, удовлетворяющая следующим свойствам:

- функция $\psi$ мероморфна на $P - p_0$ с дивизором полюсов $D$;

- функция $\psi \exp[-q(k(p))]$ аналитична в окрестности точки $p_0$.

Множество всех функций Бейкера-Ахиезера, связанных с параметрами $(p_0, k, D, q)$, образует векторное пространство $BA(p_0, k, D, q)$.

Выберем на $P$ канонический базис циклов $\{a_i, b_i\}$. Обозначим через $\Omega^q$ нормированный условиями

$$\oint\limits_{a_i} \Omega^q = 0\,(i = 1, ..., g)$$

мероморфный дифференциал с единственным полюсом в точке $p_0$, вида

$$\Omega^q(p) = dq(k) + O(1)d\epsilon = q'dk + O(k^{-2})dk.$$

Интегралы

$$U_i^q = \oint\limits_{b_i} \Omega^q \text{ формируют вектор } U^q.$$

**Лемма 14.1.** *Степень дивизора нулей $D'$ функции Бейкера-Ахиезера $\psi$ равна $g$ и $A(D') \equiv A(D) - U^q$.*

*Proof.* Рассмотрим мероморфный дифференциал $\omega = d\lg\psi = \frac{d\psi}{\psi}$. Он имеет нулевой вычет в $p_0$ поскольку функция $\psi \exp[-q(k(p))]$ аналитична в окрестности этой точки. Таким образом, вычет дифференциал $\frac{d\psi}{\psi}$ в точке $p_0$ равен 0. Следовательно его полюса образуют дивизор $D + D'$. Таким образом, согласно теореме о вычетах, $\deg D' = \deg D = g$.

Пусть $D = \sum\limits_{j=1}^{g} p_j$ и $D' = \sum\limits_{j=1}^{g} p'_j$. Обозначим через $\tilde\omega_j$ мероморфный дифференциал, голоморфный вне точек $p_j$, $p'_j$, имеющий в этих точках вычеты $1, -1$ соответственно и нормированный условиями $\oint\limits_{a_i} \tilde\omega_j = 0\,(i = 1, ..., g)$. Тогда

$$\omega = \sum_{j=1}^{g} \tilde\omega_j + \Omega^q + \sum_{r=1}^{g} c_r\omega_r,$$

где $\{\omega_r\}$ — базис голоморфных дифференциалов, нормированный условиями $\oint\limits_{a_i} \omega_r = 2\pi\mathtt{i}\delta_{ir}$. С другой стороны,

$$\oint\limits_{a_i} \omega = 2\pi\mathtt{i}n_i, \quad \oint\limits_{b_i} \omega = 2\pi\mathtt{i}m_i, \text{ где } n_i, m_i \in \mathbb{Z}.$$

Таким образом, $c_i = n_i$ и, согласно билинейным соотношениям Римана,

$$2\pi\mathtt{i}m_i = \oint\limits_{b_i} (\sum_{j=1}^{g} \tilde\omega_j + \Omega^q + \sum_{r=1}^{g} c_i\omega_r) = \sum_{j=1}^{g} \int\limits_{p_j}^{p'_j} \tilde\omega_j + U_i^q + \sum_{j=1}^{g} n_j B_{jk},$$

откуда

$$(A(D') - A(D))_i = A_i(\sum_{j=1}^{g} \int\limits_{p'_j}^{p_j} \tilde\omega_j) \equiv -U_i^q.$$

$\square$

**Теорема 14.1.** *Векторное пространство $BA(p_0,k,D,q)$ одномерно и порождается функцией*

$$\psi = \exp(\int\limits_{p_*}^{p} \Omega^q)\frac{\theta(A_{p_*}(p) - A_{p_*}(D) + U^q - K_{p_*})}{\theta(A_{p_*}(p) - A_{p_*}(D) - K_{p_*})},$$

*где $p_* \neq p_0$ и пути интегрирования для $A_{p_*}(p)$ и $\int\limits_{p_*}^{p} \Omega^q$ одинаковы.*

*Proof.* Докажем, что правая часть формулы не зависит от выбора пути интегрирования. Действительно, если мы добавим к пути интегрирования цикл $c = \sum\limits_{i=1}^{g} n_i a_i + \sum\limits_{i=1}^{g} m_i b_i$, то к интегралу $\int\limits_{p_*}^{p} \Omega^q$ добавится число

$$\sum_{i=1}^{g} m_i U_i^q =< M, U^q >, \text{ где } M = (m_1, ..., m_g),$$

а к вектору $A_{p_*}(p)$ добавится вектор

$$2\pi \mathtt{i} N + BM, \text{ где } N = (n_1, ..., n_g).$$

Таким образом, функция $\psi_{(p_0,\epsilon,D,q)}$ умножится на

$$\exp < M, N > \frac{\exp[-\frac{1}{2} < BM, M > - < M, A_{p_*}(p) - A_{p_*}(D) + U^q - K_{p_*} >]}{\exp[-\frac{1}{2} < BM, M > - < M, A_{p_*}(p) - A_{p_*}(D) - K_{p_*} >]} = 1.$$

Дивизор полюсов функции $\psi$ равен $D$ согласно теореме Римана о нулях 13.1. Таким образом, $\psi \in BA(p_0,k,D,q)$. Согласно лемме 14.1, дивизор нулей $D'$ функции $\psi$ такой, что $A(D') = A(D) - \tilde{U}^q$ и, следовательно. Таким образом, если $\tilde{\psi} \in BA(p_0,k,D,q)$, то $\frac{\tilde{\psi}}{\psi}$ — мероморфная функция с неспециальным дивизором полюсов и, следовательно, константа. □

**Задача 14.1.** *Построить функции, имеющие несколько экспоненциальных точек, и доказать для них аналог последней теоремы.*

## 15. Уравнение Кадомцева-Петвиашвили.

Исследуем теперь зависимость функции Бейкера-Ахиезера из множества $BA(p_0, k, D, q)$ от коэффициентов многочлена $q(k) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i k^i$. Положим $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ и $\partial = \partial_1$.

В этом случае $\Omega^q$ — это мероморфный дифференциал с нулевыми $a$ периодами, имеющий в локальной карте $k^{-1}$ вид

$$(\sum_{i=1}^{n} x_i k^i)' dk + O(k^{-2}) dk.$$

Он представляется в виде суммы $\Omega^q = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \Omega^i$, где $\Omega^j$ — нормированный условиями

$$\oint_{a_j} \Omega^i = 0 \, (j = 1, ..., g)$$

мероморфный дифференциал с единственным полюсом в точке $p_0$, вида

$$\Omega^i(p) = d(k^i) + O(k^{-2}) dk.$$

Обозначим через $U^i$ вектор с координатами

$$U^i_j = \oint_{b_j} \Omega^i \; (j = 1, ..., g).$$

Тогда

$$U^q = \sum_{i=1}^{n} x_i U^i.$$

**Задача 15.1.** *Доказать, что в окрестности точки $p_0$ отображение Абеля равно $A_{p_0} = -\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i k^{-i} U^i + O(k^{-n})$ и найти $\alpha_i$. (Подсказка: Использовать билинейные соотношения Римана.)*

**Лемма 15.1.** *Векторное пространство $BA(p_0, k, D, q)$ порождается функцией*

$$\psi(x; k) = \psi(x_1, x_2, ..., x_n; k) = \exp(\sum_{i=1}^{n} x_i k^i)(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j k^{-j}),$$

*где*

$$\partial \xi_1 = -\partial^2 \ln \theta\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i U^i - (A_{p_0}(D) + K_{p_0})\Big)$$

*Proof.* Согласно теореме 14.1, векторное пространство $BA(p_0, k, D, q)$ порождается функцией

$$\psi = \exp(\int_{p_*}^{p} \sum x_i \Omega^i) \frac{\theta(A_{p_*}(p) - A_{p_*}(D) + \sum x_i U^i - K_{p_*})}{\theta(A_{p_*}(p) - A_{p_*}(D) - K_{p_*})} = C \exp(\sum_{i=1}^{N} x_i k^i)(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \xi_i k^{-j}).$$

В частности
$$\ln(\psi) = \sum_{i=1}^{n} x_i k^i + \ln C + \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i k^{-i}.$$

Таким образом, $\xi_1$ — это коэффициент при $k^{-1}$ в разложении функции
$$f = \int\limits_{p_*}^{p} \sum_{i=1}^{n} x_i \Omega^i + \ln \frac{\theta(A_{p_*}(p) - A_{p_*}(D) + \sum\limits_{i=1}^{n} x_i U^i - K_{p_*})}{\theta(A_{p_*}(p) - A_{p_*}(D) - K_{p_*})}.$$

Функция $f$ отличается от функции
$$\ln \theta(A_{p_*}(p) - A_{p_*}(D) + \sum_{i=1}^{n} x_i U^i - K_{p_*})$$
на линейную комбинацию переменных $x_i$. Последняя функция равна, согласно задаче 15.1,
$$\tilde{f} = \ln \theta(-k^{-1}U^1 + O(k^{-1}) - A_{p_0}(D) + \sum_{i=1}^{n} x_i U^i - K_{p_*})$$
Таким образом, $\xi_1$ — это это коэффициент при $k^{-1}$ в разложении функции $\hat{f} = \tilde{f} + \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i + const.$

Таким образом
$$\xi_1 = \frac{\partial \hat{f}}{\partial k^{-1}}|_{k=\infty} = -\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_1}|_{k=\infty} + const = -\partial \ln \theta(\sum_{i=1}^{n} x_i U^i - (A_{p_0}(D) + K_{p_0})) + const.$$

□

Лемма 15.1 не изменится если мы заменим полином $q$ на формальный ряд $q(k) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i k^i$. Далее мы будем считать, что функции зависят от бесконечного числа переменных $x = (x_1, x_2, \dots)$.

**Лемма 15.2.** *Для любого $n > 1$ существуют функции $B_i^r(x)$ такие что $\partial_n \psi = L_n \psi$, при $L_n = \partial^n + \sum\limits_{i=2}^{n} B_n^i \partial^{n-i}$.*

*Proof.* Из леммы 15.1 следует, что
$$\partial_i \psi = k^i \exp(\sum_{i=1}^{\infty} x_i k^i)(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j k^{-j}) + \exp(\sum_{i=1}^{\infty} x_i k^i)(\sum_{j=1}^{\infty} \partial_i \xi_j k^{-j})$$
и
$$\partial^i \psi = k^i \exp(\sum_{i=1}^{\infty} x_i k^i)(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j k^{-j}) + k^{i-1} \exp(\sum_{i=1}^{\infty} x_i k^i)(\sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\xi}_j k^{-j})).$$
Поэтому существуют функции $B_i^r(x)$ такие, что
$$\partial_i \psi = \partial^i \psi + \sum_{r=2}^{i} B_i^r \partial^{i-r} \psi + \exp(\sum_{i=1}^{\infty} x_i k^i)(\sum_{j=1}^{\infty} \hat{\xi}_j k^{-j}).$$

Последнее слагаемое удовлетворяет аксиомам для функции Бейкера-Ахиезера и, следовательно, согласно лемме 15.1, равно 0, $\square$

**Пример 15.1.**

$$\partial\psi = k\exp(\sum_{i=1}^{\infty} x_i k^i)(1+\sum_{j=1}^{\infty}\xi_j k^{-j}) + \exp(\sum_{i=1}^{\infty} x_i k^i)(\sum_{j=1}^{\infty}\partial\xi_j k^{-j}) =$$

$$\exp(\sum_{i=1}^{\infty} x_i k^i)(k+\xi_1+\sum_{j=1}^{\infty}(\xi_{j+1}+\partial\xi_j)k^{-j}).$$

$$\partial^2\psi = \exp(\sum_{i=1}^{\infty} x_i k^i)(k^2+k\xi_1+(\xi_2+2\partial\xi_1)+\sum_{j=1}^{\infty}(\xi_{j+2}+2\partial\xi_{j+1}+\partial^2\xi_j)k^{-j}).$$

$$\partial_2\psi = \exp(\sum_{i=1}^{N} x_i k^i)(k^2+k\xi_1+\xi_2+\sum_{j=1}^{\infty}(\xi_{j+2}+\partial_2\xi_j)k^{-j}).$$

*Таким образом*

$$\partial_2\psi = \partial^2\psi - 2\partial\xi_1\psi + \exp(\sum_{i=1}^{\infty} x_i k^i)(\sum_{j=1}^{\infty}\hat{\xi}_i k^{-j}).$$

*то есть* $B_2^2 = -2\partial\xi_1$.

**Задача 15.2.** *Доказать что* $B_3^2 = -3\partial\xi_2$, $B_3^3 = 3\xi_1\partial\xi_1 + 3\partial^2\xi_1 - 3\partial\xi_2$.

**Теорема 15.1.** *Пусть* $u = B_2^2$. *Тогда* $\frac{3}{4}\partial_2^2 u = \partial(\partial_3 u - \frac{1}{4}(6u\partial u + \partial^3 u))$.

*Proof.* Операторы $A_2 = \partial_2 - (\partial^2 + B_2^2)$ и $A_3 = \partial_3 - (\partial^3 + B_3^2\partial + B_3^3)$ имеют общее бесконечномерное ядро $\psi(x;k)$ и, следовательно, коммутируют. Условие коммутации эквивалентно системе уравнений

$$\frac{3}{2}\partial_2 u + \frac{3}{2}\partial^2 u - 2\partial B_3^3 = 0$$

$$\partial_2 B_3^3 - \partial_3 u + \partial^3 u + \frac{3}{2}u\partial u - \partial^2 B_3^3 = 0.$$

Исключая $B_3^3$ получаем утверждение леммы. $\square$

Дифференциальное уравнение

$$\frac{3}{4}\partial_2^2 u = \partial(\partial_3 u - \frac{1}{4}(6u\partial u + \partial^3 u))$$

часто возникает в различных областях математики и математической физики. Оно называется*уравнением Кадомцева-Петвиашвили* или сокращенно *KP*.

Согласно лемме 15.1, $u = B_2^2 = 2\partial\ln\theta(\sum_{i=1}^{\infty} x_i U^i - (A_{p_0}(D)+K))$. Таким образом мы доказали.

**Следствие 15.1.** *Пусть $D$ — неспециальный дивизор на Римановой поверхности $P$. Тогда функция*

$$u = 2\partial^2 \ln\theta(\sum_{i=1}^{\infty} x_i U^i - (A_{p_0}(D) + K_{p_0}))$$

*удовлетворяет уравнению KP.*

Следствие 15.1 можно рассматривать как дифференциальное уравнение на $\theta$-функцию. Следствие утверждает, что уравнение *KP* выполнено, если $\theta$-функция, построена по Римановой поверхности. В конце 70-х годов С.П.Новиков высказал гипотезу, что любая $\theta$-функция, удовлетворяющая *KP* отвечает некоторой римановой поверхности. В 80-е годы эта гипотеза была доказана японским математиком Шиото. Таким образом, уравнение КП дает решение проблемы Шоттки описания $\theta$-функций римановых поверхностей. Возникающие при этом условия на римановы матрицы были найдены Б.А.Дубровиным.

**Задача 15.3.** *Доказать, что если $P$ — гиперэллиптическая риманова поверхность, дивизор $D$ симметричен относительно гиперэллиптической инволюции, $p_0$ — точка Вейерштрасса и локальный параметр $k^{-1}$ симметричен относительно гиперэллиптической инволюции, то $U^2 = 0$ и функция*

$$-2\partial^2 \ln\theta(x_1 U^1 + x_3 U^3 - (A_{p_0}(D) + K_{p_0}))$$

*удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$\partial_3 u = \frac{1}{4}(6u\partial u + \partial^3 u),$$

*называемому уравнением Кортевега-де Фреза (КдФ).*

Продолжая конструкцию, использованную в доказательстве теоремы можно получить бесконечный набор дифференциальных уравнений по бесконечному числу переменных на $u$. Этот набор дифференциальных уравнений называется *иерархией KP*.