

**Программа курса «Функциональный анализ»  
Часть 1: осень 2015, лектор: профессор В. И. Богачев**

Курс функционального анализа дает введение в широкий круг проблем, связанных с геометрией бесконечномерных линейных пространств, с линейными операторами и уравнениями в таких пространствах. Курс рассчитан на студентов, знакомых с основами анализа и линейной алгебры, изучаемыми на 1 курсе. В некоторых разделах полезно знакомство с интегралом Лебега.

1. Основные структуры и задачи функционального анализа: пространства, отображения, уравнения.
2. Метрические, банаховы и гильбертовы пространства. Примеры: пространства непрерывных функций, интегрируемых функций и пространства последовательностей. Изометричность метрического пространства части банахова пространства ограниченных функций на нем.
3. Компакты. Критерии компактности в бесконечномерных пространствах. Эквивалентность норм на конечномерном пространстве. Некомпактность шара в бесконечномерном нормированном пространстве.
4. Теоремы о неподвижных точках: теорема о сжимающих отображениях и теорема Шаудера. Применения.
5. Ортонормированные системы и базисы в гильбертовых пространствах. Неравенство Бесселя. Равенство Парсеваля. Ортогональные проекции и ортогональные разложения в гильбертовом пространстве. Существование ортонормированного базиса в сепарабельном евклидовом пространстве. Примеры базисов. Теорема Рисса – Фишера об изоморфизме сепарабельных гильбертовых пространств.
6. Линейные операторы и линейные функционалы. Норма оператора и непрерывность оператора. Теорема Банаха – Штейнгауза.
7. Теорема Рисса об общем виде непрерывного линейного функционала на гильбертовом пространстве. Явный вид сопряженных к конкретным пространствам. Теорема Хана – Банаха и ее следствия.
8. Теорема Банаха об обратном операторе. Теорема о замкнутом графике.
9. Компактные операторы и их свойства. Примеры компактных и некомпактных операторов.
10. Слабая и \*-слабая сходимости. Слабая сходимости и слабая компактность в гильбертовом пространстве.
11. Спектр оператора. Спектр компактного оператора и альтернатива Фредгольма в гильбертовом пространстве. Теорема Гильберта – Шмидта. Применение к интегральным уравнениям.
12. Обобщенные функции классов  $D'$  и  $S'$ . Производная обобщенной функции. Уравнения с обобщенными функциями.
13. Преобразование Фурье в  $L^2$  и  $S'$ . Собственные функции преобразования Фурье.
14. Классы Соболева.

Литература:

1. Богачев В.И. Функциональный анализ: учебное пособие. Москва, ПСТГУ, 2011.
2. Богачев В.И., Смолянов О.Г. Действительный и функциональный анализ: университетский курс. 2-е изд., Москва – Ижевск, РХД, 2011.