Топологические векторные пространства и обобщённые функции

(спецкурс, осенний семестр 2015–2016 уч. года)

Лектор — доц. А. Ю. Пирковский

Функциональный анализ в его традиционном понимании имеет дело преимущественно с банаховыми и, в частности, гильбертовыми пространствами. Однако многие классические векторные пространства обладают естественными топологиями, которые не задаются нормой. Таковы, например, многие пространства гладких, голоморфных и обобщенных функций. Теория топологических векторных пространств — наука о пространствах именно такого рода. Ее расцвет приходится на 1950-е гг., однако и сейчас (вопреки расхожему мнению, происходящему из не вполне компетентных источников) она продолжает развиваться — уже не столько в плане абстрактной теории, сколько в направлении приложений к дифференциальным операторам и многомерной комплексно-аналитической геометрии.

В курсе предполагается познакомиться с основами теории топологических векторных пространств и обсудить некоторые ее приложения к теории обобщенных функций и к комплексно-аналитической геометрии.

Пререквизиты. Желательно знакомство с основными фактами функционального анализа (банаховы и гильбертовы пространства, ограниченные линейные операторы).

Краткая программа курса

1. **Основные понятия и примеры.** Топологические векторные пространства. Полунормы и локально выпуклые пространства. Непрерывные линейные операторы. Критерии нормируемости и метризуемости. Полнота. Примеры: пространства непрерывных, гладких, голоморфных функций, пространство Шварца.

2. **Конструкции.** Факторпространства, произведения, копроизведения, обратные и прямые пределы, пополнения, топологические тензорные произведения.

3. **Линейные операторы.** Борнологические и бочечные пространства. Равностепенная непрерывность. Теоремы Банаха–Штейнгауза, Банаха об открытом отображении, Банаха–Алаоглу–Бурбаки.

4. **Двойственность.** Дуальные пары и слабые топологии. Теорема о биполяре. Теорема Макки–Аренса. Топология Макки, сильная топология. Рефлексивность. Связь свойств оператора со свойствами его сопряженного.

5. **Тензорные произведения и ядерные пространства.** Ядерные операторы. Ядерные пространства и их свойства. Примеры ядерных пространств. Характеризация ядерных пространств в терминах тензорных произведений.

6. **Приложения.** Пространства обобщенных функций. Теорема Шварца о ядре. Когерентные аналитические пучки. Теорема конечности Картана–Серра.