

А. Л. Городенцев

Полугодовой спецкурс «Пучки и гомологическая алгебра»

Это введение в теорию пучков и сопутствующую ей гомологическую алгебру — стандартную на сегодняшний день алгебраическую технику работы с локально заданными объектами¹ на многообразии X . В алгебраической и дифференциальной геометрии и топологии эта техника позволяет строить по таким локальным данным глобальные топологические и геометрические инварианты многообразия X , а также эффективно их вычислять. В некоммутативной геометрии она приводит к «геометрическим» инвариантам категорий, наделённых топологиями Гротендика.

Продолжительность: Осенний семестр (1-й и 2-й модули) 2015/16 учебного года.

Рекомендуемые учебники:

- [D] В. И. Данилов. *Когомологии алгебраических многообразий*. В книге «Алгебраическая геометрия – 2». Итоги науки и техники. Совр. пробл. математ. Фунд. напр. Т. 35. Москва, ВИНТИ, 1989, с. 5 – 130.
- [GH] Ф. Гриффитс, Дж. Харрис. *Принципы алгебраической геометрии. Часть I*.
- [GM] С. И. Гельфанд, Ю. И. Манин. *Методы гомологической алгебры. Часть I*.
- [I] B. Iversen. *Cohomology of Sheaves*.
- [W] C. A. Weibel. *An Introduction to Homological Algebra*.

Предподготовка: первые 2 – 3 семестра (4 – 6 модулей) стандартных курсов алгебры, анализа и геометрии и топологии, читаемых в бакалавриате нашего факультета или в НМУ.

Примерная программа:

1. Категории, функторы предпучки. Важные примеры: предпучки на категории открытых множеств топологического пространства и на симплициальной категории. Категория функторов, лемма Йонеды, представимые функторы. Сопряжённые функторы. (Ко)пределы диаграмм. ([GM], [W])
2. Пучки на топологических пространствах. Слои, этальное пространство и опучковывание предпучка. Прямой и обратный образ. Абелевы пучки. ([I], [GM])
3. Комплексы и (ко)гомологии, длинная точная последовательность (ко)гомологий (напоминалка). Комплексы Кошуля. Перестановочность гомологий с фильтрованными копределами. Спектральные последовательности фильтрованных комплексов, бикомплексов и точных пар. ([GM], [D], [W])
4. Глобальные сечения, вялые пучки и вялая резольвента Годемана. Когомологии и гиперкогомологии пучков. Ациклические резольвенты. Последовательность Майера – Вьеториса и резольвента Чеха. Ациклические покрытия и критерий ацикличности Картана. Когомологии Чеха. ([I], [D])
5. Мягкие и тонкие пучки на паракомпактных хаусдорфовых пространствах. Пучки дифференциальных форм, лемма Пуанкаре и теорема ДеРама. ([GM], [GH], [D])
6. Высшие прямые образы. Спектральная последовательность Лере. ([I], [D], [GH])
7. (Если хватит сил и времени.) Когерентные пучки в алгебраической геометрии и их геометрические приложения. Ациклические аффинные покрытия алгебраических многообразий. Когомологии обратимых пучков на проективных пространствах. ([D])
8. (Если хватит сил и времени.) Топологии Гротендика и пучки на сайтах. ([GM])

¹такими, как функции с ограниченной областью определения, локально заданные сечения векторных расслоений, локально определённые непрерывные отображения и т. п.