

Уравнения с частными производными

Лектор — д.ф.-м.н. Чепыжов Владимир Викторович

Теория дифференциальных уравнений с частными производными имеет две характерные особенности. Прежде всего, она является основным инструментом современной математической физики. Как известно, теория обыкновенных дифференциальных уравнений начала развиваться в XVIII веке сразу после возникновения дифференциального и интегрального исчисления. Именно через обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ) новое исчисление шло к задачам геометрии и механики. Уравнения в частных производных (УрЧП) стали изучаться значительно позже в виде конкретных уравнений, которые возникали в физике. Это привело к появлению в середине XVIII века новой ветви анализа – уравнений математической физики. Основы этой науки были заложены в трудах Д'Аламбера, Эйлера, Бернулли, Лагранжа, Лапласа, Пуассона, Фурье. Эти ученые исследовали конкретные задачи математической физики, а разработанные ими идеи и методы оказались применимы к широким классам ДУ, что послужило в конце XIX века основой для развития общей теории УрЧП.

Другая особенность теории УрЧП – ее тесная связь с другими разделами математики: с функциональным анализом и теорией функций, топологией, алгеброй, комплексным анализом и другими. УрЧП используют основные понятия и методы этих областей математики и, в свою очередь, влияют на их проблематику и направление исследований. Классический пример – это исследование колебаний струны. Уравнение колебаний струны было выведено Д'Аламбером в 1747 году. Он также получил формулу, представляющую общее решение этого уравнения. Эйлер получил формулу, которая дает решение задачи Коши для уравнения колебаний струны. Эта формула теперь называется формулой Д'Аламбера. Бернулли утверждал, что всякое решение этого уравнения представляется тригонометрическим рядом. Спор Эйлера с Д'Аламбером и Бернулли о природе решений уравнения колебаний струны имел важное значение для развития математической физики, анализа и особенно теории тригонометрических рядов. Дальнейшее исследование проблемы о разложении функций в тригонометрические ряды было проделано Фурье в 1822 г. в связи с задачами о распространении тепла, а затем в работах Дирихле были впервые сформулированы достаточные условия разложимости функции в тригонометрический ряд.

Итак, вопрос о представлении функции тригонометрическим рядом впервые возник в задачах математической физики и в значительной мере способствовал созданию современной теории множеств и теории функций. При изучении конкретных уравнений из физических задач часто создавались общие методы, которые применялись вначале без строгого математического обоснования к широкому кругу проблем. Например, так возникли метод Фурье, метод Рунге, метод Галеркина, методы теории возмущений и др. Эффективность этих методов заставляла искать для них строгое математическое обоснование. Это приводило к созданию новых математических теорий и новых направлений исследований (теория интеграла Фурье, теория разложения по собственным функциям и пр.)

Примерная программа курса (20 лекций)

1. Физические задачи, приводящие к уравнениям в частных производных. Линейное уравнение с частными производными второго порядка и их классификация. Характеристики уравнений с частными производными.
2. Постановка основных краевых задач. Корректные краевые задачи. Теорема Коши-Ковалевской о локальной разрешимости задачи Коши для уравнений типа Ковалевской

3. Задача Коши для уравнения упругих колебаний струны, формула Даламбера. Гладкость решения в зависимости от гладкости начальных данных. Области зависимости решений от начальных данных, конечная скорость распространения колебаний. Метод Фурье решения волновых уравнений. Обобщенные решения уравнения колебаний струны.
4. Задача Штурма-Лиувилля. Свойства собственных значений и собственных функций оператора Штурма-Лиувилля. Функция Грина задачи Штурма-Лиувилля и ее свойства.
5. Уравнение теплопроводности. Смешанная краевая задача и ее решение по методу Фурье. Принцип максимума. Теорема единственности и непрерывной зависимости решения первой краевой задачи от начальных и граничных условий. Функция Грина уравнения теплопроводности и ее свойства.
6. Постановка задачи Коши для уравнения теплопроводности во всем пространстве. Теорема единственности в классе ограниченных функций. Решение задачи Коши для уравнения теплопроводности с помощью преобразования Фурье, формула Пуассона. Уравнения и системы, корректные по Петровскому.
7. Задача Коши для волнового уравнения. Энергетическое неравенство. Формула Кирхгофа решения задачи Коши для волнового уравнения в $\mathbb{R}^3$. Распространение волн. Передний и задний фронт волны. Метод спуска. Формула Пуассона.
8. Эллиптические уравнения. Формулы Грина. Фундаментальное решение оператора Лапласа. Представление решения задачи Дирихле при помощи функции Грина в шаре и в круге. Обоснование формулы Пуассона.
9. Гармонические функции и их свойства. Принцип максимума для гармонических функций. Теорема об устранимой особенности для гармонических функций. Теорема Лиувилля.
10. Обобщенные производные в смысле Соболева. Пространства Соболева H^1 и H_0^1 . Неравенство Фридрихса. Решение обобщенной задачи Дирихле для уравнения Пуассона. Вариационный метод решения этой задачи.

Список литературы

- [1] Владимиров В.С., Жаринов В.В. Уравнения математической физики. – М.: Физматлит, 2003.
- [2] Ильин А.М. Уравнения математической физики. – М.: Физматлит, 2009.
- [3] Байков В.А., Жибер А.В. Уравнения математической физики. – Ижевск: РХД, 2003.
- [4] Шубин М.А. Лекции об уравнениях математической физики. – М.: МЦНМО, 2003.
- [5] Олейник О.А. Лекции об уравнениях с частными производными. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010.