# Упражнения 09.09.2015

1. Докажите, что группы $\mathbb{G}_a, \mathbb{G}_m, GL_n, SL_n, D_n$ (диагональные матрицы), $B_n$ (верхнетреугольные матрицы), $U_n$ (строго верхнетреугольные матрицы) связны.

2. Характеристика k нечётная. a) Докажите, что ортогональная группа $O_n$ не связна. b) Докажите, что отображение $X \mapsto (1-X)(1+X)^{-1}$ задаёт изоморфизм между открытым подмножеством $SO_n$ и открытым подмножеством кососимметричных $n \times n$-матриц (преобразование Кэли Cayley). c) Докажите, что $SO_n = O_n^0$.

3. Пусть $G$ связная алгебраическая группа, а $N \subset G$ конечная нормальная приведённая подгруппа. Докажите, что $N$ содержится в центре $G$.

4. Характеристика k нулевая в этой и всех следующих задачах. Пусть $V$ двумерное (тавтологическое) представление $G = SL(2)$. Докажите, что $\mathrm{Sym}^n V$ неприводимо и самодвойственно.

5. Докажите, что $G \times G$-модуль $\mathsf{k}[G]$ изоморфен $\bigoplus_{n \geq 0} \mathrm{Sym}^n V \otimes \mathrm{Sym}^n V^*$.

6. Пусть $C \subset \mathrm{Mat}_2$ подмногообразие вырожденных матриц (асимптотический конус $G$). Докажите, что $G \times G$-модули $\mathsf{k}[G]$ и $\mathsf{k}[C]$ изоморфны. *Указание:* рассмотрите отображение $V \times V^* \to C$, $(v, \xi) \mapsto v \otimes \xi$ и докажите, что оно задаёт изоморфизм между $\mathsf{k}[C]$ и бидонородными многочленами на $V \times V^*$ т.ч. степень по первой переменной равняется степени по второй.

7. $C$ является полугруппой (относительно умножения матриц), и умножение $C \times C \to C$ задаёт коумножение $\mathsf{k}[C] \to \mathsf{k}[C] \otimes \mathsf{k}[C]$. Докажите, что изоморфизм задачи 6 можно выбрать согласованно с коумножением.

8. Докажите, что на алгебре $\mathsf{k}[G]$ есть $G \times G$-инвариантная возрастающая фильтрация с присоединённой градуированной алгеброй $\mathsf{k}[C]$. Как она согласована с коумножением?