Упражнения 16.09.2015

1. Характеристика k равна $p > 0$. Докажите, что a) точная последовательность $SL(2,\mathsf{k})$-модулей $0 \to \mathsf{k}x^p \oplus \mathsf{k}y^p \to \operatorname{Sym}^p V \to Q \to 0$ не расщепляется. b) $Q \simeq \operatorname{Sym}^{p-2} V$.

2. Пусть лаг (линейная алгебраическая группа) G действует на аффинном многообразии X. Докажите, что найдётся замкнутое вложение $\psi\colon X \hookrightarrow \mathbb{A}^n$ и рациональное представление $\varphi\colon G \to GL(n)$ т.ч. $\psi(gx) = \varphi(g)\psi(x)\ \forall g, x$.

3. Пусть G лаг, $g \in G,\ \lambda \in X_*(G)$. Положим $\theta_{g,\lambda}\colon \mathbb{G}_m \to G,\ t \mapsto \lambda(t)g\lambda(t)^{-1}$. Это морфизм алгебраических многообразий. Пусть $P(\lambda) \subset G$ — подмножество $g \in G$ т.ч. $\theta_{g,\lambda}$ продолжается до морфизма $\mathbb{G}_m \subset \mathbb{A}^1 \dashrightarrow G$. Докажите, что a) $P(\lambda)$ — подгруппа G, содержащая централизатор $H := Z_G(\lambda(\mathbb{G}_m))$. b) $P(g\lambda g^{-1}) = gP(\lambda)g^{-1}$. c) $P(\lambda) \cap P(-\lambda) = H$. d) Пусть $G = GL(n)$ действует в $V = \mathsf{k}^n$. Тогда $\forall \lambda \in X_*(G)$ существует флаг $V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_s \subset V$ т.ч. $P(\lambda) = \{g \in G\colon g(V_i) = V_i,\ 1 \le i \le s\}$. e) $P(\lambda)$ замкнутая подгруппа в G для любых $G, \lambda \in X_*(G)$.

4. Пусть T тор ($T \simeq \mathbb{G}_m^k$), а X — аффинное T-пространство, и $A = \mathsf{k}[X]$. Положим $B = A^T = \{f \in A\colon f(tx) = f(x)\ \forall t, x\}$, и $Y = \operatorname{Spec} B$. Вложение $B \hookrightarrow A$ задаёт морфизм $\varphi\colon X \to Y$ т.ч. $\varphi(tx) = \varphi(x)\ \forall t, x$. Докажите, что если Y' аффинное многообразие и $\varphi'\colon X \to Y'$ морфизм т.ч. $\varphi'(tx) = \varphi'(x)\ \forall t, x$, то есть единственный морфизм $\psi\colon Y \to Y'$ т.ч. $\varphi' = \varphi \circ \psi$.

5. Эквивариантным аффинным вложением $T \hookrightarrow X$ называется аффинное T-пространство, содержащее T в качестве открытого подмножества, т.ч. действие $T \times X \to X$ продолжает умножение $T \times T \to T$. Докажите, что a) есть конечно-порождённая подполугруппа $S \subset X^*(T)$, порождающая $X^*(T)$, т.ч. $\mathsf{k}[X] \simeq \mathsf{k}[S]$ (полугрупповая алгебра). b) Обратно, для любой такой подполугруппы S имеется эквивариантное аффинное вложение $T \hookrightarrow \operatorname{Spec} \mathsf{k}[S]$.