Упражнения 14.09.2015

1. Характеристика k равна $p > 0$ в этой и следующих задачах, если явно не оговорено противное. Пусть $G \subset GL(p+1)$ задана следующими уравнениями: $g_{ij} = 0$ при $i > j$; $g_{ii} = 1$; $g_{ij} = \frac{1}{(j-i)!} g_{12}^{j-i}$ при $0 < j - i < p$. Положим $x = g_{12}$, $y = g_{1,p+1}$ — координаты на G, задающие изоморфизм $G \simeq \mathbb{A}^2$.

a) Докажите, что G двумерная коммутативная унипотентная алгебраическая группа, не изоморфная векторной группе $\mathbb{G}_a^2$.

b) Постройте сюръективный гомоморфизм $G \to \mathbb{G}_a$ с ядром $\mathbb{G}_a$.

c) Рассмотрим отображение $\varpi\colon G \to G,\ g \mapsto g^p$. Опишите в координатах гомоморфизм $V : G \to G$ т.ч. $\varpi(x, y) = V(x^p, y^p)$.

d) Пусть T_λ эндоморфизм $G\colon (g_{ij}) \mapsto (\lambda^{j-i} g_{ij})$ $(\lambda \in$ k$)$. Опишите подкольцо кольца $\mathrm{End}(G)$, порождённое всеми T_λ (вторые векторы Витта k).

e) Пусть $\phi\colon G \to G,\ (x, y) \mapsto (x^p, y^p)$. Докажите, что $\phi, V, T_\lambda,\ \lambda \in$ k, порождают кольцо $\mathrm{End}(G)$, и опишите это кольцо явно.

2. Докажите, что всякая конечная подгруппа $\mathbb{G}_a$ является ядром сюръективного гомоморфизма $\mathbb{G}_a \to \mathbb{G}_a$ (надо использовать гомоморфизм Артина-Шрайера $\mathbb{G}_a \to \mathbb{G}_a,\ t \mapsto t^p - t$).

3. Пусть H алгебраическая группа, изоморфная как многообразие $\mathbb{A}^2$, с умножением $(x, z) \cdot (y, w) = (x + y, z + w + \frac{1}{2}(x^p y - x y^p))$ $(p > 2)$. Докажите, что H двумерная некоммутативная связная унипотентная группа (ложный Гейзенберг).

4. Докажите, что двумерная унипотентная группа над полем нулевой характеристики коммутативна.