

## Упражнения 21.09.2015

1.  $PGL_n := GL_n/\mathbb{C}_m$  факторгруппа по центру (скалярным матрицам). Докажите, что она является линейной алгебраической группой, т.е. постройте замкнутое вложение в  $GL_N$ .

2. Опишите ядро композиции  $SL_n \hookrightarrow GL_n \twoheadrightarrow PGL_n$  (как конечную групповую схему, не обязательно приведённую).

3. Открытое вложение  $GL_n \hookrightarrow \text{Mat}_n$  задаёт открытое вложение  $PGL_n \hookrightarrow \mathbb{P}(\text{Mat}_n) = \mathbb{P}^{n^2-1}$ . С другой стороны, если  $\mathbf{k} = \mathbb{C}$ , графики присоединённого представления (неприводимого  $n^2 - 1$ -мерного представления  $PGL_n$ ) в её алгебре Ли  $\mathfrak{g}$  задают вложение  $PGL_n \hookrightarrow \text{Gr}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g})$  (грассманиан  $n^2 - 1$ -мерных подпространств в  $2(n^2 - 1)$ -мерном пространстве). Докажите, что а) для  $n = 2$  вложения  $\mathbb{P}^3 \hookrightarrow PGL_2 \hookrightarrow \text{Gr}(3, 6)$  продолжаются до замкнутого вложения  $PGL_2 \hookrightarrow \mathbb{P}^3 \hookrightarrow \text{Gr}(3, 6)$  (чудесная компактификация ДеКончини-Прочези De Concini, Procesi). б) Для  $n = 3$  вложения  $\mathbb{P}^8 \hookrightarrow PGL_3 \hookrightarrow \text{Gr}(8, 16)$  не продолжаются до замкнутого вложения  $PGL_3 \hookrightarrow \mathbb{P}^8 \not\hookrightarrow \text{Gr}(8, 16)$  (это связано с тем, что  $\mathbb{P}^3 \setminus PGL_2 \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  неособо, но  $\mathbb{P}^8 \setminus PGL_3$  особо, так что ничего чудесного в этой компактификации нет).