Струны. Задачи. 1

1. Найдите действие $S(x_0, x_1; t)$ для гармонического осциллятора с лагранжианом $L = \frac{1}{2}(m\dot{x}^2 - kx^2)$ при движении по классической траектории от x_0 до x_1 за время t.

2. Напишите уравнения движения для систем с лагранжианами

$$L_1 = -m\sqrt{\dot{X}_0^2 - \sum_i \dot{X}_i^2}\,, \quad L_2 = \tfrac{1}{2}\Big(\dot{X}_0^2 - \sum_i \dot{X}_i^2\Big)e^{-1} + \tfrac{1}{2}m^2 e$$

(m - константа, а e – динамическая переменная) и сравните их решения.

3. Рассмотрим действие точечной релятивистской частицы в произвольной пространственно-временной метрике $G_{\mu\nu}(X)$:

$$S[X; e] = \tfrac{1}{2}\int d\tau e\left(e^{-2}G_{\mu\nu}(X)\frac{\partial X^\mu}{\partial\tau}\frac{\partial X^\nu}{\partial\tau} - m^2c^2\right)$$

Выведите уравнения движения для этого действия. Каков их геометрический смысл?

4. Вычислите интеграл

$$\int_{\mathbb{R}^2} dx_1 dx_2 \exp\left(-\tfrac{1}{2}(\vec{x}, A\vec{x})\right) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx_1 dx_2 \exp\Big(-\tfrac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2} A_{ij}x_i x_j\Big)$$

для матриц а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, б) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

5. Рассмотрим действие

$$S = \frac{1}{2}\int\Big(\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - m^2\varphi^2\Big)d^2x$$

для вещественного скалярного поля φ в двумерном пространстве Минковского с сигнатурой $(+1, -1)$ и координатами $x_0 = t$, $x_1 = x$.

   а) Написать уравнение движения поля φ и найти его общее решение в виде интеграла Фурье.

   б) Выписать компоненты тензора энергии-импульса поля φ. При каком условии след тензора энергии-импульса обращается в нуль?

   в) Выразить энергию и импульс поля φ через коэффициенты Фурье, входящие в общее решение уравнения движения.