1 Вводная лекция

1.1 Теория Струн

- В широком смысле - "основа современной матфизики": некоторый единый подход к теории элементарных частиц, гравитации и задачам статистической физики.
- В узком смысле - релятивистские струны являются простейшим обобщением релятивистских частиц. Теории на "мировых листах" размерности $p+1 = 1, 2, 3, \ldots$ называются соответственно частицами, струнами, мембранами - в общем случае p-бранами. Нетривиально, что существуют даже браны с $p+1 = 0$ - инстантоны.
- Наконец, совершенно нетривиально, что *квантовая* теория - непротиворечивая, действующая итп - *не* существует при $p > 1$. Остается пока разобраться с $p = 0, 1$ (хотя гипотетическая возможность создания квантовой теории мембран $p = 2$ до сих пор является одним из вызовов в теоретической физике, инициированным впрочем развитием теории струн).

1.2 Точечная частица

Принцип наименьшего действия - *не следует* ниоткуда.

$$S = \int_0^T L(q, \dot{q}; t) dt = S[q, \dot{q}; T], \tag{1.1}$$

- Интегральный функционал от траекторий (достаточно гладких), отображений отрезка $p = 0$ в многообразие $q : [0, T] \mapsto M \simeq \mathbb{R}^D$;
- Зависит только от (обобщенных) координат и скоростей, достаточно гладкие отображения (что реально в квантовом мире?);
- "Большие системы", $S \gg \hbar$ - траектории $\delta S = 0$.

Уравнения движения $\delta S = \int \delta L dt$, где

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i = \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\right)\delta q_i + \\ + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right) \tag{1.2}$$

Граничный член: $\delta q|_{0,T} = 0$, поэтому на экстремали

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad i = 1, \ldots, \dim M \tag{1.3}$$

уравнения Эйлера-Лагранжа.

ℵ: Часто требуют больше - локальное условие вместо глобального!

Почему все это естественно? Свободное движение (принцип относительности) [1]

$$L_{\text{free}}(q, \dot{q}; t) = L_{\text{free}}(\dot{q}) = L_{\text{free}}(\dot{q}^2) = \tfrac{1}{2}m\dot{q}^2 \tag{1.4}$$

А что еще? Вообще говоря:

$$L(q, \dot{q}) = -U(q) + A_i(q)\dot{q}_i + \tfrac{1}{2}g_{ij}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j + \ldots \tag{1.5}$$

просто разложение по степеням производных.

- Члены выше квадратичных писать "не нужно"(?!) - несущественны при медленных изменениях;
- $U(q)$ - скалярный потенциал взаимодействия, $A_i(q)$ - вектор-потенциал (электро)магнитного поля, $g_{ij}(q)$ - метрика (движение на “кривом” многообразии).

Уравнения Эйлера-Лагранжа

$$m\ddot{q}_i = -\frac{\partial U}{\partial q_i} - F_{ij}\dot{q}_j = f_i(q, \dot{q}; t), \\ F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i \tag{1.6}$$

приводят ко второму закону Ньютона.

[1] Наименьшее действие $S \sim \langle V^2 \rangle \geq \langle V \rangle^2$.

- Закон Ньютона - утверждение, что классическая механика описывается дифференциальными уравнениями 2-го порядка: состояние системы определяется её координатами и скоростями (импульсами), взаимодействие зависит них же. Дифференциальное уравнение вычисляет ускорения по координатам и скоростям и задает (однозначно!) состояния системы в последующие моменты времени.

- Вид естественных в природе взаимодействий почти однозначно определяется простыми свойствами действия - больше практически ничего нельзя написать! Более сложные явления - явная зависимость от времени и т.п. - более характерны для “неэлементарных” систем.

1.3 Релятивистская частица

Обозначения: $s^2 = -(x_1 - x_0)^\mu (x_1 - x_0)_\mu$, $\{x^\mu\} = (ct, \mathbf{x})$, $x^\mu x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu$; $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1, 1, \ldots, 1)$ (этот выбор возможно будет меняться на протяжении курса!). Действие свободной частицы - релятивистский инвариант

$$S[X] = \kappa \int ds = \kappa \int \sqrt{-dX^\mu dX_\mu} = \kappa c \int dt \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \dot{\mathbf{X}}^2} \tag{1.7}$$

Забудем про время - длина дуги в пространстве: $dl = \left| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \tau} \right| d\tau$, $L = \int dl = \int d\tau \sqrt{\left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \tau} \right)}$. Дальше - добавили время и изменили знак под корнем, так как для времениподобного интервала $dx^\mu dx_\mu < 0$ (по повторяющимся индексам подразумеваем суммирование!). В нерелятивистском пределе

$$\begin{aligned} S[X] \underset{c \to \infty}{\to} \kappa c \int dt \left(1 - \frac{1}{2c^2} \dot{\mathbf{X}}^2 + \ldots \right) \overset{?}{=} \\ \overset{?}{=} \mathrm{const} + \int dt \frac{m}{2} \dot{\mathbf{X}}^2 + O(1/c) \end{aligned} \tag{1.8}$$

т.е. $\kappa = -mc$. А релятивистское свободное действие - не квадратично?

Введем произвольный параметр на траектории:

$$S[X] = -mc \int \sqrt{-dX^\mu dX_\mu} = -mc \int d\tau \sqrt{-\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu} \tag{1.9}$$

где теперь $\dot{X}^\mu \equiv \frac{dX^\mu}{d\tau}$, а τ - вовсе не обязательно t. (В книге ЛЛ пользуются $\tau = s$, $\frac{dX^\mu}{d\tau}$ - 4-скорость). Уравнения движения

$$\begin{aligned} \delta S[X] = mc\int d\tau \frac{\dot{X}_\mu \delta \dot{X}^\mu}{\sqrt{-\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu}} = \\ = mc\frac{\dot{X}_\mu \delta X^\mu}{\sqrt{-\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu}}\Bigg| - \int d\tau \delta X^\mu \frac{d}{d\tau}\frac{mc\dot{X}_\mu}{\sqrt{-\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu}} \end{aligned} \tag{1.10}$$

т.е.

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} = 0, \qquad p_\mu = \frac{\partial S}{\partial X^\mu} = -\frac{mc\dot{X}_\mu}{\sqrt{-\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu}} \tag{1.11}$$

Действие (1.9) вообще от выбора τ не зависит, т.е. инвариантно относительно любых замен

$$\tau \to \tau' = f(\tau), \qquad f(\tau_0) = \tau_0, \quad f(\tau_1) = \tau_1 \tag{1.12}$$

"длина" не зависит от выбора параметризации кривой [2].

Это действие легко переписать в квадратичном виде

$$S[X] \to S[X, e] = \tfrac{1}{2}\int d\tau \frac{\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu}{e(\tau)} - \tfrac{1}{2}m^2c^2 \int e(\tau)d\tau \tag{1.14}$$

не теряя инвариантности, если $e(\tau)d\tau = e(\tau')d\tau'$. Действительно

$$\frac{\delta S}{\delta e} = -\frac{\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu}{e^2} - m^2c^2 = 0 \tag{1.15}$$

дает $e = \frac{1}{mc}\sqrt{-\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu}$, и после подстановки назад в действие

$$\begin{aligned} S[X, e] \to \tfrac{1}{2}\int d\tau \frac{\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu}{e(\tau)} - \tfrac{1}{2}m^2c^2 \int e(\tau)d\tau = \\ = -mc\int d\tau \sqrt{-\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu} \end{aligned} \tag{1.16}$$

[2] Как записать эту симметрию локально? Этот простой ответ

$$\delta X^\mu = \xi \dot{X}^\mu, \qquad \delta e = \frac{d}{d\tau}(\xi e) \tag{1.13}$$

с локальным параметром $\xi = \xi(\tau) = \tau - f(\tau)$, а одномерная метрика $e(\tau)d\tau$ введена чуть ниже, требуется получить самостоятельно.

получаем старый результат. Но: действие (1.14) - квадратично по X-м и не содержит производных от $e(\tau)$, т.е. у $e(\tau)$ “нет динамики”, и пользуясь репараметризационной инвариантностью его можно выбрать в любом виде, например $e(\tau) = \text{const}$, “одномерная геометрия” - почти тривиальна. Динамика (по вспомогательному параметру τ, который вынужден играть роль времени) переменных $\{X^\mu(\tau)\}$

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\dot{X}^\mu}{e} = 0 \tag{1.17}$$

при этом линейна. Кроме того, для $S[X, e]$ существует нетривиальный предел $m \to 0$ - безмассовая частица, движущаяся со скоростью света.

1.4 Частица во внешних полях

Взаимодействие общего вида ($c = 1$)

$$\begin{aligned} \delta S = \int ds \boldsymbol{\Phi}(X^\mu, dX^\mu/ds) = \int d\tau e(\tau)\boldsymbol{\Phi}(X^\mu, \dot{X}^\mu/e(\tau)) = \\ = \int d\tau e \Phi(X^\mu) + \int A_\mu(X) dX^\mu + \tfrac{1}{2}\int d\tau e^{-1} G_{\mu\nu}(X)\dot{X}^\mu \dot{X}^\nu + \ldots \end{aligned} \tag{1.18}$$

включает скалярное, векторное и гравитационное поле (которое, отметим сразу, просто перенормирует кинетический член для чачтицы в плоском пространстве). Например,

$$\begin{aligned} S \to S_0 + \int A_\mu(X) dX^\mu = S + \int A_\mu(X)\dot{X}^\mu d\tau = \\ \underset{\tau = t}{=} S + \int dt \left(\mathbf{A}(\mathbf{X}, t)\dot{\mathbf{X}} - \varphi(\mathbf{X}, t)\right) \end{aligned} \tag{1.19}$$

естественный линейный по производным член. Электромагнитное взаимодействие с векторным и скалярным потенциалами. Сила взаимодействия

$$\begin{aligned} \delta \int A_\mu(X)\dot{X}^\mu d\tau = \int \left(\partial_\nu A_\mu \delta X^\nu \dot{X}^\mu + A_\mu \delta \dot{X}^\mu\right) \simeq \\ \simeq \int \left(\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu\right) \delta X^\nu \dot{X}^\mu \end{aligned} \tag{1.20}$$

т.е. $\frac{dp_\mu}{d\tau} = f_\mu = \frac{1}{c} F_{\mu\nu} \dot{X}^\nu$, где $p_\mu = \frac{\delta S_0}{\delta X^\mu}$, а

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix} \tag{1.21}$$

при стандартных выражениях $\mathbf{H} = \mathrm{rot}\mathbf{A}$, $\mathbf{E} = -\mathrm{grad}\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$.

Наконец, полезным в дальнейшем окажется следующая манипуляция. Продолжение $\tau \to -i\tau_E$, $\eta_{\mu\nu} \to \delta_{\mu\nu}$, $iS \to -S$. Тогда возникает *евклидово действие*

$$S[X] = \tfrac{1}{2} \int d\tau \frac{\dot{X}_\mu \dot{X}_\mu}{e(\tau)} + \tfrac{1}{2} m^2 \int e(\tau) d\tau \tag{1.22}$$

где все положительно и верхние индексы не отличаются от нижних.

1.5 Струна Намбу

А если та же картина - двумерная? Для начала - в нашем родном 3-мерном евклидовом пространстве: элементарная площадь

$$\begin{aligned} dA = d\tau d\sigma \left| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \tau} \times \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \sigma} \right| = \\ = d\tau d\sigma \left| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \tau} \right| \left| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \sigma} \right| \sin\theta = d\tau d\sigma \left| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \tau} \right| \left| \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \sigma} \right| \sqrt{1 - \cos^2\theta} = \\ = d\tau d\sigma \sqrt{\left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \tau} \right)^2 \left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \sigma} \right)^2 - \left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \sigma} \right)^2} \end{aligned} \tag{1.23}$$

а полная площадь

$$A = \int d\tau d\sigma \sqrt{\det \left\| \begin{matrix} \left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \tau} \right) & \left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \sigma} \right) \\ \left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \tau} \right) & \left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \sigma} \right) \end{matrix} \right\|} \tag{1.24}$$

Для сигнатуры Минковского и произвольного числа пространственно-временных координат получим действие Намбу-Гото

$$
\begin{aligned}
S = -T \int d\tau d\sigma \sqrt{-\det_{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu} = \\
= -T \int d\tau d\sigma \sqrt{-\partial_\tau X^\mu \partial_\tau X_\mu \partial_\sigma X^\nu \partial_\sigma X_\nu + (\partial_\tau X^\mu \partial_\sigma X_\mu)^2}
\end{aligned}
\tag{1.25}
$$

Ничего хорошего - кроме как площадь двумерной поверхности, вложенной в плоское $\mathbb{R}^D$ (с "неправильным знаком" у времени - про это все время хочется забыть).

1.6 Струна Полякова

Однако, аналогично частице можно написать (сразу работаем в евклидовой версии!):

$$
\begin{gathered}
S[X,g] = \tfrac{1}{2}\, T \int_\Sigma d^2\sigma \sqrt{g} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu \\
\alpha, \beta = 1, 2, \qquad \mu, \nu = 1, \ldots, D
\end{gathered}
\tag{1.26}
$$

где $ds^2 = g_{\alpha\beta} d\sigma^\alpha d\sigma^\beta$ - "внутренняя метрика" на поверхности Σ, вообще говоря не связанная с индуцированной (прямой аналог собственной длины $e(\tau)d\tau$ на траектории), $g = \det_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}$. Уравнения движения:

$$
\frac{\delta}{\delta X_\mu} S[X,g] = \partial_\alpha \sqrt{g} g^{\alpha\beta} \partial_\beta X^\mu = 0 \tag{1.27}
$$

- уравнения Лапласа (в пространстве Минковского - с неправильным знаком, при $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$ просто волновое уравнение $\partial_\tau^2 X^\mu - \partial_\sigma^2 X^\mu = 0$, $X^\mu(\tau,\sigma) = f^\mu(\tau - \sigma) + g^\mu(\tau + \sigma)$); а

$$
\frac{1}{T\sqrt{g}} \frac{\delta}{\delta g^{\alpha\beta}} S[X,g] = \tfrac{1}{2} \left(\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu - \tfrac{1}{2} g_{\alpha\beta} g^{\alpha'\beta'} \partial_{\alpha'} X^\mu \partial_{\beta'} X_\mu \right) \equiv t_{\alpha\beta} \tag{1.28}
$$

и если тензор энергии-импульса $t_{\alpha\beta} = 0$, то очевидное решение $g_{\alpha\beta} \sim \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu$. Подставляя это решение (индуцированную метрику) назад в $S[X,g]$ возвращаемся к действию Намбу.

- $g_{\alpha\beta} = \rho(\sigma,\tau)\eta_{\alpha\beta}$ - квадратичная теория при произвольном $\rho(\sigma,\tau)$ - свойство 2-х измерений

$$\begin{aligned} S = -\tfrac{1}{2}\, T \int d\tau d\sigma \partial_\alpha X^\mu \partial^\alpha X_\mu = \\ = -\tfrac{1}{2}\, T \int d\tau d\sigma \left(\partial_\tau X^\mu \partial_\tau X_\mu - \partial_\sigma X^\mu \partial_\sigma X_\mu\right) \end{aligned} \tag{1.29}$$

- Теория релятивистской струны - аналог точечной частицы, вместо траекторий - цилиндры, $0 \le \sigma \le 2\pi$, $X^\mu(\sigma,\tau) = \sum_n e^{in\sigma} X_n^\mu(\tau)$ - бесконечный набор релятивистских частиц. (Каковы массы и спины этих частиц?)

- Естественное взаимодействие

$$\begin{aligned} S \to S_0 + \tfrac{1}{2}\, T \int_\Sigma d^2\sigma \sqrt{g} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu G_{\mu\nu}(X) + \int_{\partial\Sigma} A_\mu dX^\mu + \\ + T \int_\Sigma d^2\sigma \sqrt{g} \Phi_{\mathrm{cl}}(X) + T \int_{\partial\Sigma} dl \Phi_{\mathrm{op}}(X) + \\ + \tfrac{1}{2}\, T \int_\Sigma d^2\sigma \epsilon^{\alpha\beta} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu B_{\mu\nu}(X) + T \int_\Sigma d^2\sigma \sqrt{g} R^{(2)} \phi(X) \end{aligned} \tag{1.30}$$

  по-прежнему с электромагнитным полем (на границе) и с метрикой пространства-времени $G_{\mu\nu}(X)$ на мировом листе - гравитация! Естественное объединение векторных полей и метрики.

- То, что $\rho(\sigma,\tau)$ пропадает из свободного действия связано со свойством $g^{\alpha\beta} t_{\alpha\beta} = 0$ - двумерная конформная теория поля.

1.7 Симметрии действия Полякова

Основной базовой симметрией теории струн является репараметризационная инвариантность. В ее основе лежит независимость наблюдаемых физических явлений от выбора параметризации на мировом листе, характерные размеры которого порядка длины Планка $\sqrt{\alpha'} \sim 10^{-33}\ cm$, $T = 1/2\pi\alpha'$. В действии для струны Полякова эта инвариантность очевидна - как для любой теории поля во внешней метрике - относительно, например, локальных преобразований $\delta\sigma^\alpha = \xi^\alpha(\sigma)$:

$$\delta X^\mu = \xi^\alpha \nabla_\alpha X^\mu = \xi^\alpha \partial_\alpha X^\mu, \qquad \delta g_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha \xi_\beta + \nabla_\beta \xi_\alpha \tag{1.31}$$

где ∇ - связность, согласованная с двумерной метрикой $\nabla_\alpha g_{\beta\gamma} = 0$. Заметим также, что *все* слагаемые, отвечающие взаимодействию струны с внешними полями, также обладают свойством репараметризационной инвариантности. Эта базовая симметрия обязана оставаться симметрией и квантовой теории.

В отличие от теории релятивистской частицы действие струны Полякова обладает еще одной дополнительной симметрией - относительно вейлевского преобразования метрики

$$g_{\alpha\beta} \to \Lambda(\sigma,\tau) g_{\alpha\beta}, \qquad \delta X^\mu = 0 \tag{1.32}$$

которая является естественной именно в двумерной теории. Эта симметрия является в каком-то смысле избыточной для классической теории: с помощью двух независимых репараметризаций можно всегда "убить" две из трех независимых компонент двумерной метрики, и привести ее, например к конформному виду $g_{\alpha\beta} = \rho(\sigma,\tau)\delta_{\alpha\beta}$, после чего конформный фактор $\rho(\sigma,\tau)$ пропадает из действия (и оно естественно инвариантно относительно $\rho \to \Lambda(\sigma,\tau)\rho$. Однако, если потребовать сохранения репараметризационной инвариантности при квантовании, например вводя ковариантное обрезание $ds^2 = g_{\alpha\beta} d\sigma^\alpha d\sigma^\beta > \epsilon$, то это условие не является вейль-инвариантным, и в квантовой теории вейлевская мода оживает.

Наконец, в действии в конформной калибровке

$$S[X]|_{g_{\alpha\beta}=\rho(\sigma,\tau)\delta_{\alpha\beta}} = \tfrac{1}{2}\, T \int_\Sigma d^2\sigma \partial_\alpha X^\mu \partial_\alpha X_\mu \sim \int_\Sigma d^2\sigma \partial X^\mu \bar{\partial} X_\mu \tag{1.33}$$

остается остаточная симметрия относительно голоморфных замен координат

$$\begin{gathered} z = e^{\tau + i\sigma} \to f(z), \qquad \bar{z} = e^{\tau - i\sigma} \to \bar{f}(\bar{z}) \\ \rho \to \rho |f'(z)|^2 \end{gathered} \tag{1.34}$$

Это бесконечномерная группа конформной симметрии в двумерии (сохраняющая углы) является важнейшей в теории струн, которая поэтому часто формулируется на языке двумерной конформной квантовой теории поля.

1.8 Теория струн и квантовая теория поля

- Одни и те же задачи - формулировка фундаментальных законов микромира;

- Двойственные физические подходы, основанные на первичном (струны) и вторичном (КТП) квантовании;

- Общий базовый аппарат - гауссовы континуальные интегралы в теории свободного поля (двумерие - струны, 4-мерие КТП);

- Рекомендуется изучать последовательно или параллельно.