

Задачи для курсовых работ на факультете математики НИУ ВШЭ от Антона Хорошкина

Задачи на разбор литературы

1. Теорема формальности для операды маленьких дисков. Различные известные доказательства и их взаимосвязь. [19], [22]
2. Описание модулярных представлений для симметрической группы. [14], [16],[23]
3. Проблема рациональности для рядов Гильберта (Пуанкаре) для конечных CW комплексов. [25]
4. Рациональный гомотопический тип дополнения к гиперплоскостям. [26]

Теория представлений и Когомологии алгебр Ли

5. Вычислить когомологии алгебры Ли $\mathfrak{gl}(m|n)$ с коэффициентами в нетривиальном неприводимом представлении. [3] [9]
6. Вычислить когомологии супералгебры Ли векторных полей на суперпространстве. [9] [10]
7. Описать категорию модулей порожденную тензорными полями для алгебры Ли формальных векторных полей на плоскости. Доказать, что соответствующая категория является категорией старшего веса. [21]
8. Описать двойственность для когомологий алгебр Ли формальных векторных полей:

$$H^\bullet(W_n, \mathfrak{gl}_n; \mathcal{F}_\lambda) = H^\bullet(W_n, \mathfrak{gl}_n; \mathcal{F}_\lambda^* \otimes_{\mathcal{O}_n} \det)[n]$$

Операды

9. Описать понятие элемента Маурера-Картана для биалгебр Ли.
10. Опишите модельную категорию алгебр над операдой в конечной характеристике, фибрантные объекты которой свободны как операда, а кофибранные свободны, как представления симметрической группы.
11. Посчитать начальные члены базиса Грёбнера для операды алгебр Мальцева, Йордановых алгебр; вычислить первые высшие операции в этих категориях. [4, 6]
12. Сформулировать и доказать нечетномерную версию гипотезы Кашивара-Верне по Алексею-Тороссяну.[1],[22].
13. Нечетномерный граф-комплекс, происходящий из дифференцирований $Der(e_3 \rightarrow e_3)$, имеет 2 градуировки гомотопическую и по количеству ребер (вершин). Доказать, что нетривиальные когомологии заключены внутри некоторого угла в плоскости этих двух градуировок. [27]
14. Вычислить базис Грёбнера для диоперады квадратичных скобок Пуассона. [4]
15. Описать понятие супералгебры над операдой. Сформулировать и доказать метод Кемера в этих терминах. Точнее в фактор-операде операды ассоциативных алгебр верно следующее: любое соотношение в операде достаточно проверять на конечно-порожденной свободной ассоциативной супералгебре.
Для каких ещё операд такое утверждение будет верно? [2]

Алгебраическая топология вокруг операд

16. Выяснить, является ли алгебра когомологий конфигурационного пространства точек в \mathbb{R}^d с не более чем k -кратными совпадениями кошулевой. Описать гомотопические группы этого пространства, как бимодуль над операдой гомотопических групп операды маленьких дисков. [8]
17. Описать операду, считающую рациональный гомотопический тип дополнения одного многообразия в другом $X \subset Y$. [18]
18. Описать гомотопический тип вложения операд маленьких дисков соседних размерностей $E_d \rightarrow E_{d+1}$. [24]

Combinatorics:

19. Описать производящие функции последовательно избегающих перестановок с повторениями. [15, 7] [17]
20. Соотношения на ряды Гильберта для кошулево двойственных алгебр над кошулево-двойственными операдами. [25],[28]
21. Описать начальные линейные сизигии для вложения Веронезе $\mathbb{P}(V) \hookrightarrow \mathbb{P}(S^k V)$. [13]

Список литературы

- [1] A. Alekseev; C. Torossian The Kashiwara-Vergne conjecture and Drinfeld's associators. <http://arxiv.org/abs/0802.4300>
- [2] E. Aljadeff; A. Kanel-Belov; Hilbert series of PI relatively free G-graded algebras are rational functions. <http://arxiv.org/abs/1011.3253>
- [3] Jonathan Brundan, Catharina Stroppel Highest weight categories arising from Khovanov's diagram algebra IV: the general linear supergroup *math.arXiv:0907.2543*
J. Eur. Math. Soc. 14 (2012), 373-419
- [4] V. Dotsenko, A. Khoroshkin. *Gröbner bases for operads* Duke Math. J. 153 (2010), no. 2, 363–396.
- [5] V. Dotsenko, A. Khoroshkin. *Free resolutions via Gröbner bases* Preprint [math.arXiv:0912.4895](http://arxiv.org/abs/math/0912.4895), 24 pp.
- [6] V. Dotsenko, A. Khoroshkin. *Quillen homology for operads via Gröbner bases* Preprint [math.arXiv:1203.5053](http://arxiv.org/abs/math/1203.5053), 25 pp.
- [7] V. Dotsenko, A. Khoroshkin. Shuffle Algebras, Homology and Consecutive Pattern Avoidance. *math.arXiv:1109.2690*, 24 pp.
- [8] Natalia Dobrinskaya, Victor Tourtchine Homology of non- k -overlapping discs *math.arXiv:1403.0881*
- [9] Fuks, D. B. Когомологии бесконечномерных алгебр Ли "Nauka", Moscow, 1984. 272 pp.
- [10] Astashkevich, A. B.; Fuchs, D. B. On the cohomology of the Lie superalgebra $W(m|n)$. *Unconventional Lie algebras, 1–13*, *Adv. Soviet Math.*, 17, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.
- [11] Fuch, D. B.; Leites, D. A. Cohomology of Lie superalgebras. *C. R. Acad. Bulgare Sci.* 37 (1984), no. 12,
- [12] V. Ginzburg, M. Kapranov. *Koszul duality for operads*, Duke Math. J., 76:1 (1994), 203–272.
- [13] A. Gorodentsev, A. Khoroshkin, A. Rudakov. *On syzygies of highest weight orbits*. Moscow Seminar on Mathematical Physics. II, 79–120, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 221, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007
- [14] G.D. James, *The Representation Theory of the Symmetric Group*, Springer Lecture Notes 682 (1978)
- [15] A. Khoroshkin; B. Shapiro. *Using homological duality in consecutive pattern avoidance*. Preprint [math.arXiv:1009.5308](http://arxiv.org/abs/math/1009.5308), 12 pp.
- [16] A. Kleshchev, *Linear and Projective Representations of Symmetric Groups*, Cambridge (2005)
- [17] Kitaev, Sergey Patterns in permutations and words. *Monographs in Theoretical Computer Science. An EATCS Series*. Springer, Heidelberg, 2011.
- [18] P. Lambrechts, D. Stanley Algebraic models of Poincaré embeddings. *Algebr. Geom. Topol.* 5 (2005), 135–182
- [19] P. Lambrechts, I. Volic Formality of the little N -disks operad *math.arXiv:0808.0457*
- [20] Sergei Merkulov, Bruno Vallette Deformation theory of representations of prop(erad)s *J. Reine Angew. Math.* 634 (2009), 51-106; 636 (2009), 123-174
- [21] Rudakov, A. N. Irreducible representations of infinite-dimensional Lie algebras of Cartan type. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* 38 (1974)
- [22] P. Ševera, T. Willwacher Equivalence of formalities of the little discs operad *math.arXiv:0905.1789* Duke Math. J. Volume 160, Number 1 (2011), 175-206.
- [23] B. Srinivasan, *Modular Representations, old and new*, Springer PROM (2011)
- [24] V. Turchin, T. Willwacher Relative (non-)formality of the little cubes operads and the algebraic Cerf Lemma *math.arXiv:1409.0163*
- [25] V. A. Ufnarovsky, *Combinatorial and asymptotical methods in algebra*, Sovr. probl. mat., Fund. napr., 57 (1990), p. 5–177 [Russian] Engl. transl.: Algebra VI, Encycl. Math. Sci., Springer, Berlin 1995, p. 1–196

- [26] С.А.Юзвинский Алгебры Орлика–Соломона в алгебре и топологии *УМН*, 2001, том 56, выпуск 2(338), страницы 87–166
- [27] Thomas Willwacher M. Kontsevich’s graph complex and the Grothendieck-Teichmueller Lie algebra *math.arXiv:1009.1654*
- [28] G. W. Zinbiel, *Encyclopedia of types of algebras 2010*, Proc. Int. Conf., in Nankai Series in Pure, Applied Mathematics and Theoretical Physics, Vol. 9 (World Scientific, Singapore, 2012), 217–298.