

Алгебра, семинар 3: линейная алгебра

1. Найдите базис подпространства в \mathbb{R}^4 ,
а) порожденного векторами $(2, 1, 1, 2)$, $(1, 2, 1, 2)$, $(2, 1, 2, 1)$, $(1, 2, 2, 1)$;
б) заданного уравнениями
$$\begin{cases} 2x + 2y + z + v = 3 \\ x + y + 2z + 2v = 3 \end{cases}.$$
2. Опишите уравнением векторное подпространство в \mathbb{R}^3 , содержащее
а) вектор $(1, 2, 3)$ и пересечение подпространств $x + y + z = 0$ и $3x + 2y + z = 0$; б) прямые $x + y + z = 3x + 2y + z = 0$ и $x + y + 2z = 3x + 2y + 2z = 0$.
3. Укажите базис пересечения в \mathbb{R}^3 а) подпространства $x + y + z = 0$ и подпространства, порожденного парой векторов $\{(1, 1, 1), (1, 2, 3)\}$; б) подпространств, порожденных парами векторов $\{(1, 1, 1), (1, 2, 3)\}$ и $\{(0, 1, 2), (1, 2, 2)\}$.
4. В пространстве вещественных многочленов одной переменной степени ≤ 3 найдите базис подпространства а) $\{f \mid f(1) = f(-1), f'(1) = 0\}$; б) порожденного всеми нечетными многочленами и всеми многочленами с корнями ± 1 ; в) $\{f \mid f(i) = 0\}$.
5. В пространстве многочленов одной переменной степени ≤ 2 найдите базис, в котором координатами любого многочлена f являются числа а) $f(0), f(1), f(2)$; б) $f(0), f'(0), f(1)$. в) В пространстве многочленов двух переменных степени ≤ 2 найдите базис, в котором координатами любого многочлена f являются числа $f(0, 0), f(1, 0), f(0, 1), f(2, 0), f(1, 1), f(0, 2)$. Докажите, что найденные наборы действительно базисы.
6. Найдите базис \mathbb{Q} -векторного пространства $\mathbb{Q}[\sqrt{2} + \sqrt{3}]$.
7. Для каких k в \mathbb{R}^4 существует а) пятерка б) x шестерка векторов, из которых можно составить ровно k базисов?