

Алгебра, семинар 2: линейная алгебра

1. Опишите все решения следующих систем уравнений:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + y + z = 7 \\ x + 3y + z = 10 \\ x + y + 4z = 15 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 2x + 2y + z + v = 3 \\ x + y + 2z + 2v = 3 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} z + w = i \\ z + iw = 1 \end{cases} \quad \text{d) } \begin{cases} z + w = i \\ z + i\bar{w} = 1 \end{cases} \quad \text{e) } \begin{cases} z + 2w = i \\ z + i\bar{w} = -1 \end{cases}$$

$$\text{f) } \begin{cases} 2x + y + z = 7 \\ x + 3y + z = 10 \\ x + y + \frac{3}{5}z = a \end{cases} \text{ при каждом значении параметра } a.$$

2. Придумайте систему уравнений с неизвестными x, y и z , все решения которой имеют вид $x = t + 1, y = t + 2, z = 2t + 1, t \in \mathbb{R}$. Проверьте, что других решений у нее нет.

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_9 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + \dots + x_9 = 2 \\ \vdots \\ x_1 + x_2 + x_3 + \dots + 2x_9 = 9 \end{cases}$$

4. Сколько решений может иметь система линейных уравнений от n неизвестных над полем из q элементов?

5. Какие из следующих подмножеств векторного пространства многочленов $\mathbb{C}[x]$ над \mathbb{C} являются его векторными подпространствами?

a) $\{f \mid f(1) = 2\}$ b) $\{f \mid f(1) = 0\}$ c) $\{f \mid f(x) = f(-x)\}$

6. Пусть V и W – не содержащиеся друг в друге подпространства векторного пространства U . Будут или не будут подпространствами следующие множества? a) $V \cap W$ b) $V + W = \{v + w \mid v \in V, w \in W\}$ c) $V \cup W$

7. Задайте линейным уравнением векторное подпространство в арифметическом пространстве \mathbb{R}^3 , порожденное векторами

a) $(1, 1, 1)$ и $(1, 1, -1)$ b) $(1, 1, 1)$ и $(2, 3, 4)$.

8. Предложите набор векторов, порождающих в \mathbb{R}^3 векторное подпространство a) $x + y + z = 0$ b) $x + 2y + 3z = 0$.

9. Перечислите все векторные подпространства в арифметическом векторном пространстве $(\mathbb{F}_2)^n$ над полем из двух элементов \mathbb{F}_2 :

a) при $n = 2$ b) при $n = 3$ c) x при произвольном n .