Алгебра, листок 1 (крайний срок сдачи – 6 октября)

0. Докажите, что в $\mathbb{C}$ нет подполя, содержащего $\mathbb{R}$ и отличного от $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}$.

1. В двумерном пространстве сила притяжения между точечными массами обратно пропорциональна расстоянию между ними. Докажите, что система из 100 закрепленных точечных масс в двумерном мире будет иметь меньше 100 точек равновесия (то есть таких точек, в которых силы притяжения этих точечных масс уравновешиваются).

2. Докажите, что формальные степенные ряды (т. е. выражения вида $\sum_{k\geqslant 0} a_k t^k$) не образуют поля относительно естественных операций сложения и умножения, а ряды Лорана (т. е. выражения вида $\sum_{k\geqslant n} a_k t^k$, где $k \in \mathbb{Z}$) образуют. Найдите обратные к $1+t$, $1+t+t^2$ и $(1+t)^2$.

3. Пусть последовательность чисел a_i, $i \geqslant 0$, задана рекуррентным соотношением $a_{n+k} = c_k a_{n+k-1} + c_{k-1} a_{n+k-2} + \ldots + c_1 a_n$, $n \geqslant 0$. Докажите, что ее производящий ряд $\sum_{k\geqslant 0} a_k t^k$ рационален (т. е. представляется как отношение двух многочленов). Найдите производящий ряд чисел Фибоначчи $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, $a_0 = a_1 = 1$.

4. **a)** Укажите в каждом конечном поле подполе простой мощности.
b) Докажите, что мощность конечного поля – степень простого числа.

5. Пусть $E \subset \mathbb{R}$ – множество длин всех отрезков, которые можно получить циркулем и линейкой из данного единичного отрезка, а также всех противоположных им чисел. **a)** Докажите, что E – поле, замкнутое относительно извлечения квадратного корня. **b)** Докажите, что $E \neq \mathbb{R}$.

6. **a)** Докажите, что множество всех векторов с нулевой суммой координат в $\mathbb{R}^n$ – подпространство, и найдите его размерность, указав базис.
b) Многочлен f двух переменных называется симметрическим, если $f(x,y) = f(y,x)$, и кососимметрическим, если $f(x,y) = -f(y,x)$. Найдите размерность пространств симметрических и кососимметрических многочленов степени $\leqslant d$, указав базисы этих пространств.

7. **a)** Сколько базисов в пространстве $(\mathbb{F}_q)^n$? Сколько в нем k-мерных подпространств **b)** для $k=1$ **c)** для $k=2$ **d)** для любого k?

8. В пространстве многочленов степени $\leqslant d$ найдите базис, в котором **a)** координатами каждого многочлена являются его значения в точках $0, 1, 2, \ldots, d$; **b)** оператор производной $f \mapsto f'$ **c)** оператор дискретной производной $f \mapsto f(x) - f(x-1)$ задается матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$.

9. **a)** Докажите, что любое линейное отображение $f: U \to V$ при подходящем выборе базисов в U и V имеет матрицу вида $\left(\begin{smallmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, где E – единичная матрица, а 0 – нулевые. Обобщите **b)** на пары $U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W$ и **c)** на цепочки линейных отображений $U_0 \xrightarrow{f_1} U_1 \xrightarrow{f_2} \ldots \xrightarrow{f_n} U_n$.

10. **a)** Назовем две тройки двумерных подпространств в $\mathbb{R}^3$ эквивалентными, если одну можно перевести в другую линейным автоморфизмом $\mathbb{R}^3$. Сколько существует классов эквивалентности троек?
b) Тот же вопрос для четверок двумерных подпространств в $\mathbb{R}^3$.