Алгебра, семинар 1: поля, комплексные числа

1. Опишите поля **a)** из трех элементов и **b)**$^{\times}$ из четырех элементов.

2. Вычислите вещественную и мнимую часть выражений $\frac{i+2}{i-1}$, $\frac{i+1}{i-\sqrt{3}}$, $i^9 + i^8 + \ldots + i + 1$.

3. Для числа $a \in \mathbb{C}$ обозначим через $\mathbb{Q}[a]$ множество всех чисел, полученных подстановкой a в многочлены с рациональными коэффициентами. Докажите, что $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$ – поле, предъявив явную формулу для обратного элемента.

4. Представление комплексного числа в форме $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ называется его тригонометрической формой, $r \geqslant 0$ – модулем, $\varphi \in [0, 2\pi)$ – аргументом.
a) Докажите, что при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются. Что происходит с модулем и аргументом при взятии обратного и сопряженного?
b) Докажите, что $z\bar{z} = |z|^2$.

5. Решите уравнения $\bar{z} = z^2$ и $z + |z| = 3 + i\sqrt{3}$.

6. **a)** Докажите формулу Муавра: $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = r^n(\cos(n\varphi) + \sin(n\varphi))$.
b) Преобразуйте в тригонометрическую форму и возведите в десятую степень число $1 + i\sqrt{3}$.

7. Найдите $\sqrt{i\sqrt{3} - 1}$ и $\sqrt[3]{-8}$. Решите уравнение $z^2 + 2z + 3i = 0$.

8. Окружность Аполлония. Найдите геометрическое место точек z, таких что $|z - 1| = 3|z|$.

9. Инверсия. Докажите, что преобразование плоскости $z \to \frac{1}{z}$ переводит окружности и прямые в окружности и прямые.

10. Докажите, что если два числа представимы в виде суммы квадратов двух целых чисел, то и их произведение представимо в таком виде.

11. Докажите, что $\cos(n \arccos\varphi)$ полиномиально зависит от φ. Эта зависимость называется многочленом Чебышёва T_n. Найдите и нарисуйте T_2, T_3 и T_6.