Листок 1. *Срок сдачи — 30 сентября.*

Определение. *Напомним, что характером тора $\mathbb{T}$ на лекции назывался морфизм $\chi\colon \mathbb{T} \mapsto \mathbb{C}^\times$ (как алгебраических многообразий), являющийся гомоморфизмом групп.*

Задача 1. Докажите, что все характеры тора задаются мономами: для заданного характера χ n-мерного тора $\mathbb{T}$ существует такой набор целых чисел $\bar{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, что

$$\chi(t_1, t_2, \dots, t_n) = t_1^{a_1} t_2^{a_2} \dots t_n^{a_n}, \quad (t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathbb{T}\,.$$

Задача 2. Пусть тор действует на конечномерном векторном пространстве W. Докажите, что в W можно так выбрать базис, чтобы это действие было диагонально и задавалось мономами (нужно указание?).

Определение. *Напомним, что на лекции по конечному множеству точек $\mathcal{A} = \{m_1, m_2, \dots, m_s\} \subset \mathbb{Z}^n$ было построено аффинное торическое многообразие $Y_{\mathcal{A}}$ как замыкание (по Зарисскому) в $\mathbb{C}^s$ множества точек вида*

$$(\chi^{m_1}(t_1, t_2, \dots, t_n), \chi^{m_2}(t_1, t_2, \dots, t_n), \dots, \chi^{m_s}(t_1, t_2, \dots, t_n), \quad (t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathbb{T}).$$

Задача 3. Рассмотрим $\mathcal{A}_1 = \{(2,0),(1,1),(1,3)\}$ и $\mathcal{A}_2 = \{(3,0),(1,1),(0,3)\}$.
a) Докажите, что $Y_{\mathcal{A}_1} = Y_{\mathcal{A}_2} = \{xz - y^3\} \subset \mathbb{C}^3$. Обозначим это многообразие через Y.
b) Оба соответствующих отображения можно продолжить до отображений $\mathbb{C}^2 \to Y$. Будут ли они сюрьективными?

Задача 4. Докажите, что идеал $I(Y_{\mathcal{A}})$ регулярных функций, обращающихся в 0 на $Y_{\mathcal{A}}$, порождается биномами (полиномами из двух мономов) следующего вида. Это биномы $\bar{x}^{\ell_+} - \bar{x}^{\ell_-}$, не делящиеся ни на какой x_i, где все координаты ℓ_+ и ℓ_- положительны, а вектор $\ell = \ell_+ - \ell_- = (\ell_1, \dots, \ell_s) \in \mathbb{Z}^s$ таков, что $\sum_1^s \ell_i m_i = 0$ (то есть те биномы, которые зануляются на образе).

Задача 5. Пусть $\alpha > 0$ иррационально. Рассмотрим полугруппу $\{(a,b) \mid a, b \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}, b \leqslant \alpha a\}$. Докажите, что она не является конечнопорождённой.

Определение. *Напомним, что на лекции множество векторов $\{m_1, \dots, m_s\}$ (принадлежащих какой-то решётке) было названо насыщенным, если*

$$\mathbb{Z}_{\geqslant 0}(m_1, \dots, m_s) = \mathbb{Z}(m_1, \dots, m_s) \cap \mathbb{Q}_{\geqslant 0}(m_1, \dots, m_s).$$

Задача 6. Пусть $\sigma^\vee$ – конус, натянутый на конечное число векторов из M. Докажите, что алгебра $\mathbb{C}[\sigma^\vee \cap M]$ целозамкнута. Эквивалентно: докажите, что построенное на лекции конечное множество порождающих полугруппы $\sigma^\vee \cap M$ насыщенно.

Задача 7. * Рассмотрим линейно независимые векторы $e_1, \dots, e_n$. Докажите, что любое подмножество во множестве $\{e_i - e_j \,|\, 1 \leqslant i, j \leqslant n\}$ насыщенно.

Задача 8. * Рассмотрим конечный связный граф без петель и кратных рёбер и построим по нему множество $A = \{e_i + e_j \mid (ij)$ является ребром в графе$\}$. Докажите, что для этого множества насыщенность эквивалентна отсутствию в графе подграфов вида "два минимальных нечётных цикла, кратчайший путь между которыми содержит хотя бы 2 ребра"(минимальный=нет рёбер между несмежными вершинами).

Задача 9. В обозначениях предыдущей задачи покажите, что если в графе есть запрещённый подграф, то во множестве A есть ненасыщенное подмножество.