Задачи к спецкурсу "Категории и универсальная алгебра" (2015)

1. Пусть **F** - отображение, переводящее объекты и морфизмы категории $\mathscr{C}$ соответственно в объекты и морфизмы категории $\mathscr{D}$. Известно, что **F** сохраняет начала, концы и композиции. Известно также, что для некоторого объекта A из $\mathscr{C}$

$$\mathscr{D}\,(\mathbf{F}(A),\mathbf{F}(A)) = \mathbf{F}[\mathscr{C}(A,A)]$$

Докажите, что $\mathbf{F}(1_A)=1_{\mathbf{F}(A)}$.

2. Докажите, что категория SET не изоморфна никакой полной подкатегории в SET°.

3. Докажите, что объект, изоморфный начальному, - начальный.

4. а) Существует ли полная подкатегория в SET, содержащая ровно 100 стрелок?

б) То же - для 20 стрелок.

5. Докажите, что если в категории все стрелки - изо, то она изоморфна своей двойственной.

6. Постройте категорию, содержащую полные подкатегории с любым конечным числом стрелок.
7. Постройте категорию с единственным объектом, которая не является локально малой.
8. Докажите, что ковариантный функтор множества-степени $\mathcal{P}$ является вложением SET в себя.

(Определение $\mathcal{P}$: $\mathcal{P}$ (X) – множество всех подмножеств X; если f: X → Y, то $\mathcal{P}$(f) : $\mathcal{P}$ (X) → $\mathcal{P}$ (Y) – отображает каждое множество Z⊂X в его образ f[Z] .)

9. Докажите, что категория SET° конкретизируема.

(Указание: используйте контравариантный функтор множества-степени $\mathcal{Q}$, который на объектах действует как $\mathcal{P}$; а если f: X → Y, то $\mathcal{Q}$(f) : $\mathcal{P}$ (Y) → $\mathcal{P}$ (X) – отображает каждое множество Z⊂Y в его прообраз $f^{-1}[Z]$.)

10. a) Докажите, что категории SET и SET° неэквивалентны.

b) Эквивалентны ли категории FINSET и $FINSET^{\circ}$?

11. Рассмотрим категорию pSET множеств с отмеченной точкой: ее объекты – множества с отмеченной точкой, а стрелки из (X,x) в (Y,y) – это отображения X в Y, переводящие x в y. Докажите, что pSET и SET не эквивалентны.
12. Докажите, что pSET изоморфна категории, в которой объекты - множества, а морфизмы - частичные функции.
13. По предкатегории $\mathscr{D}$ определим *категорию путей* $\mathscr{D}^+$ (в другой терминологии: *свободную категорию, порожденную* $\mathscr{D}$) следующим образом: объекты в ней - те же, что в $\mathscr{D}$, а морфизмы из x в y – это пути, т.е. конечные последовательности стрелок из $\mathscr{D}$, в которых конец каждой стрелки совпадает с началом следующей. *Композиция* путей – это их соединение; *тождественный путь из x в x* – это пустая последовательность с началом x (такие тоже разрешены).

    а) Докажите, что $\mathscr{D}^+$- категория.

    б) Докажите, что если $\mathscr{D}$- категория, то $\mathscr{D}^+$ изоморфна $\mathscr{D}$.
14. Дайте определение композиции функторов и докажите, что композиция функторов – функтор.
15. Дайте определение обратного функтора и докажите, что функтор имеет обратный, если и только если он является изоморфизмом категорий.