## Математический анализ. 1 курс. Листок 2. Срок сдачи 09 октября 2015

*Для сдачи каждой из задач 2.1 — 2.6 необходимо чисто рассказать одному преподавателю столько пунктов этой задачи, сколько преподаватель сочтет нужным выслушать. Задачи со звездочкой сдаются и фиксируются в кондуите, но в баллах не оцениваются.*

**2.1.** Докажите свойства пределов последовательностей, исходя из явного определения предела последовательности.
**a)** Если $a_n \geqslant b_n$ и существуют пределы $A = \lim a_n$ и $B = \lim b_n$, то $A \geqslant B$.
**b)** Если $a_n \geqslant b_n \geqslant c_n$ и существуют пределы $A = \lim a_n = \lim c_n$, то существует предел $\lim b_n$ и $\lim b_n = A$.
**c)** Если существуют пределы $A = \lim a_n$ и $B = \lim b_n$, то существует предел $\lim a_n b_n = AB$; если $B \neq 0$, то существует предел $\lim a_n/b_n = A/B$.
**d)** Обратная к бесконечно малой последовательности есть бесконечно большая и наоборот.
**e)** Сумма ограниченной последовательности и бесконечно большой есть бесконечно большая.
**f)** Если последовательность $a_n$ имеет конечный предел, то $\forall \varepsilon > 0\ \exists M \in \mathbb{N}\ \forall m, n > M$ справедливо $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

**2.2. a)** Если последовательность $b_n$ имеет предел $B$, то любая её подпоследовательность сходится и имеет тот же предел $B$.
**b)** Пусть последовательность $a_n$ принимает значение $b$ бесконечное число раз, причем $a_n$ имеет предел. Докажите, что этот предел есть $b$.
**c)** Пусть $b$ есть предельная точка множества $X$. Тогда существует последовательность точек множества $X$, сходящаяся к $b$.
**d)** Пусть множество значений последовательности бесконечно. Верно ли, что если это множество имеет ровно одну предельную точку, то последовательность имеет предел? Верно ли обратное: если такая последовательность имеет предел, то множество её значений имеет ровно одну предельную точку? Какими будут ответы, если дополнительное потребовать, что последовательность принимает каждое значение ровно один раз?
**e)** Подпоследовательность монотонной последовательности имеет предел. Докажите, что сама последовательность тогда тоже имеет предел.

**2.3. a)** Докажите, что если функция дифференцируема в точке, то она непрерывна в этой точке.
**b)** Может ли функция быть дифференцируема в точке, если в остальных точках она разрывна?
**c)** Функция дифференцируема в окрестности точки. Может ли ее производная быть разрывна в этой точке?
**d)** Функция дифференцируема в окрестности точки. Может ли ее производная быть неограничена в любой окрестности этой точки?
**e)** Функция $f$ определена в окрестности точки $a$ и дифференцируема в точке $a$. Прямая $y = kx + b$ проходит через точку $(a, f(a))$, причём график функции $f$ весь лежит по одну сторону от этой прямой. Докажите, что $f'(a) = k$.

**2.4.** Пусть функции $f$ и $g$ являются бесконечно малыми при стремлении $x$ к $a$.
**a)** Пусть $a = 0$. Докажите все верные импликации между следующими тремя утверждениями и приведите примеры для каждой неверной импликации.
(1) $f(x) = o(x)$; (2) $f(x) = O(x^2)$;
(3) $f$ дифференцируема в нуле и $f(0) = f'(0) = 0$.
**b)** Пусть $f = O(g)$. Следует ли из этого, что $f$ и $g$ бесконечно малые одного порядка (то есть $f \sim \lambda g$ при подходящей константе $\lambda$)? Верно ли обратное?
**c)** Докажите, что $f \sim g$ равносильно тому, что $f - g = o(f)$.

**2.5.** Докажите, что определения предела функции по Коши и по Гейне равносильны.

**2.6. a)** Докажите школьную теорему о сумме бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

**b)** Дана периодическая последовательность цифр $a_n$. Докажите, что последовательность $b_n = \sum_{k=1}^{n} a_k 10^{-k}$ имеет предел. (Подсказка: полезно 2.2.е.)
**c)** Доказать, что последовательность

$$x_1 = \sqrt{6},\quad x_2 = \sqrt{6+\sqrt{6}},\ \ldots,\ x_n = \overbrace{\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots}}}}^{n \text{ раз корень}}$$

сходится и найти её предел.

**2.7.*** Существует ли последовательность, принимающая каждое свое значение только один раз, такая что любой её член является пределом некоторой её подпоследовательности?

**2.8.*** Всякая ли последовательность содержит монотонную подпоследовательность?

**2.9.*** **a)** Функция $f$ дифференцируема в окрестности $U$ точки $a$ и имеет в точке $a$ единственный строгий максимум, т.е. $\forall x \in U$, $x \neq a$, $f(x) < f(a)$. Верно ли, что найдется такое $\varepsilon$, что $f$ монотонно возрастает на $(a-\varepsilon, a)$ и монотонно убывает на $(a, a+\varepsilon)$?
**b)** Функция дифференцируема в окрестности точки и её производная в этой точке положительна. Следует ли из этого, что функция монотонна в некоторой окрестности этой точки?