1 Вводная лекция

2 Квантование релятивистской частицы

2.1 Релятивистская частица

Квадратичное действие

$$S[X] \to S[X,e] = \tfrac{1}{2}\int d\tau \frac{\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu}{e(\tau)} - \tfrac{1}{2}m^2 \int e(\tau) d\tau \tag{2.1}$$

инвариантное относительно репараметризаций

$$\delta X^\mu = \xi \dot{X}^\mu, \qquad \delta e = \frac{d}{d\tau}(\xi e) \tag{2.2}$$

с локальным параметром $\xi = \xi(\tau) = \tau - f(\tau)$. Уравнения движения включают связь

$$\frac{\delta S}{\delta e} = -\frac{\dot{X}^\mu \dot{X}_\mu}{e^2} - m^2 = 0 \tag{2.3}$$

которую *необходимо* учитывать при квантовании. Основные вопросы при квантовании:

- пространство состояний системы;
- как происходит динамика - выбор времени;
- кто такие наблюдаемые величины.

Для нерелятивистской (тем более свободной!) частицы с действием $S = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} dt\ m\dot{\mathbf{q}}^2$ ответы на все вопросы очевидны:

- пространство состояний - например функции $\psi(\mathbf{q})$, или фурье образы $\tilde{\psi}(\mathbf{p})$, т.е. функции импульсов $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \dot{q}_i/m$;
- время t задано изначально. Динамика определяется каноническим гамильтонианом $H = \mathbf{p}\dot{\mathbf{q}} - L = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}$;
- наблюдаемые величины: в классике - функции на фазовом пространстве $f(q,p)$ - превращаются в дифференциальные операторы в силу канонических коммутационных соотношений
$$[\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij} \tag{2.4}$$
т.е., например $p_i \to \hat{p}_i = -i\hbar\frac{\partial}{\partial q_i}$.

Удобнее однако для свободной частицы пользоваться импульсным представлением, поскольку импульсы $\frac{d}{dt}p_i = 0$ являются интегралами движения (что верно и для гейзенберговых операторов, так как они коммутируют с гамильтонианом $H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}$), а волновая функция будет просто умножаться на фазу (т.е. динамика тривиальна). Интеграл по путям

$$K(x_1,t_1|x_0,t_0) = \int Dq \exp\left(\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t_1} dt\ \tfrac{1}{2}m\dot{\mathbf{q}}^2\right) = \langle x_1|\exp\left(-\frac{i}{\hbar}H(t_1-t_0)\right)|x_0\rangle \tag{2.5}$$

с граничными условиями $q(t_0) = x_0$ и $q(t_1) = x_1$ легко (задача!) позволяет вычислить матричный элемент оператора эволюции между начальным и конечным состояниями с заданной координатой.

Что возникает при наивном подходе в релятивистском случае? Посмотрим на действие формально и перейдем к гамильтонову формализму, *считая временем* параметр на мировом листе, тогда

$$P_\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{X}^\mu} = \frac{\dot{X}_\mu}{e}, \qquad p_e = 0, \qquad \frac{dP_\mu}{d\tau} = 0 \tag{2.6}$$

однако в силу связи

$$P_\mu P^\mu + m^2 = 0 \tag{2.7}$$

состояния определяются, например, лишь пространственными компонентами импульса. Другими словами, пространство состояний может быть описано функциями $\phi_\pm(\mathbf{p})$, которые естественным образом связаны с решениями уравнения Клейна-Гордона.

Действительно, канонические коммутационные соотношения в данном случае ($\hbar = 1$)

$$[X^\mu, P_\nu] = i\delta^\mu_\nu \tag{2.8}$$

релятивистски-ковариантны ($[X^\mu, P^\nu] = i\eta^{\mu\nu}$, $[X_\mu, P_\nu] = i\eta_{\mu\nu}$), и если описывать пространство состояний в координатном представлении, то $P_\mu = -i\frac{\partial}{\partial X^\mu} \equiv -i\partial_\mu$ и на волновую функцию возникает связь

$$\left(-\partial_\mu\partial^\mu + m^2\right)\phi(X) = 0 \tag{2.9}$$

буквально представляющая из себя уравнение Клейна-Гордона. Его решение

$$\begin{aligned}\phi(X) &= \int d^4P e^{-iPX}\tilde{\phi}(P) = \int d^4P e^{-iPX}\delta(P^2+m^2)\breve{\phi}(P) = \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2\mathcal{E}(\mathbf{p})}\left(e^{i\mathcal{E}(\mathbf{p})t - i\mathbf{p}\mathbf{x}}\phi_+(\mathbf{p}) + e^{-i\mathcal{E}(\mathbf{p})t - i\mathbf{p}\mathbf{x}}\phi_-(\mathbf{p})\right)\end{aligned} \tag{2.10}$$

представляет собой два набора волн-частиц (одночастичных состояний с $\mathcal{E}_\pm = \pm\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2} \equiv \pm\mathcal{E}(\mathbf{p})$), локализованных на массовой поверхности

$$\mathcal{E}^2 = \mathbf{p}^2 + m^2 \tag{2.11}$$

Заметим, что наивный гамильтониан

$$\mathcal{H} = P_\mu \dot{X}^\mu - \mathcal{L} = \tfrac{1}{2} e \left(P_\mu P^\mu + m^2 \right) \tag{2.12}$$

в силу уравнения связи просто равен нулю. Таким образом динамика по параметру τ на мировой линии "уж совсем тривиальна", но несмотря на это мы в дальнейшем все равно будем его обзывать "мировым временем" и иногда даже обозначать $\tau \to t$.

2.2 Евклидово действие и континуальный интеграл

Интеграл по путям в релятивистской евклидовой квантовой механике естественно формально записать как

$$\mathcal{K}(X_1, X_0) = \int DeDX \ e^{-\int_0^1 dt \left(\frac{\dot{X}^2}{2e} + \frac{1}{2} e m^2 \right)} = \int De \ e^{-\frac{m^2}{2} \int_0^1 dte} \int DX e^{-\int_0^1 dt \frac{\dot{X}^2}{2e}} \tag{2.13}$$

где мы выделили гауссов интеграл во внешней одномерной метрике $e(t)$. Заметим сразу, что в силу репараметризационной инвариантности можно надеяться, что интеграл по одномерным метрикам так или иначе сведется к интегралу по длинам траекторий $T = \int_0^1 dte$ (т.е. в частности от самой длины траектории T, аналога $t_1 - t_0$ в нерелятивистском случае, вообще не будет зависеть!).

Об этом подробно поговорим дальше, а сначала рассмотрим гауссов интеграл по координатам, в котором сразу выберем $e(t) = T$

$$I(T) = \int DX e^{-\int_0^1 dt \frac{\dot{X}^2}{2T}} \tag{2.14}$$

Пусть для определенности $X(t)$ определена на отрезке $t \in [0, 1]$ с нулевыми граничными условиями $X(0) = 0$ и $X(1) = 0$ [1]. В пространстве таких функций можно выбрать естественный базис, и любую функцию представить как

$$X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \sin(\pi k t), \quad \dot{X}(t) = \pi \sum_{k=1}^{\infty} k x_k \cos(\pi k t) \tag{2.15}$$

[1]Легко доказать, что для произвольных $X(0) = X_0$ и $X(1) = X_1$ сдвинув переменную интегрирования

$$X(t) = Y(t) + X_0 + \frac{X_1 - X_0}{T} t$$

и считая, что при линейном сдвиге $DX = DY$, мы получим, что

$$\int_{X(0)=X_0, X(1)\ =X_1} DX e^{-\int_0^1 dt \frac{\dot{X}^2}{2T}} = e^{-\frac{(X_1 - X_0)^2}{2T}} I(T)$$

Тогда

$$S[X] = \int_0^1 dt \frac{\dot{X}^2}{2T} = \frac{\pi^2}{2T} \sum_{k,l=1}^{\infty} k x_k l x_l \int_0^1 dt \cos(\pi k t) \cos(\pi l t) = \frac{\pi^2}{4T} \sum_{k=1}^{\infty} k^2 x_k^2 \tag{2.16}$$

а меру интегрирования было бы естественно определить как $DX = \mathcal{N} \prod_{k=1}^{\infty} dx_k$, где $\mathcal{N} = \mathcal{N}(T)$ - некоторая "нормировочная" постоянная. Строго говоря, так поступать нельзя - в том смысле, что константа $\mathcal{N}$ окажется "особой", так как интегрирование в функциональном интеграле проводится вовсе не по гладким траекториям (вопрос из "теории меры").

Результат интегрирования в (2.14) теперь легко формально записать в виде

$$\begin{aligned} I(T) &= \mathcal{N} \int \prod_{k=1}^{\infty} dx_k \exp\left(-\frac{\pi^2}{4T} \sum_{k=1}^{\infty} k^2 x_k^2 \right) = \\ &= \mathcal{N} \prod_{k=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2\pi}{a_k}} \bigg|_{a_k = \frac{\pi^2 k^2}{2T}} = \mathcal{N} \prod_{k=1}^{\infty} \sqrt{\frac{4T}{\pi k^2}} \end{aligned} \tag{2.17}$$

и для интерпретации этого ответа необходимо сначала определить нормировочную константу $\mathcal{N}$.

Константу $\mathcal{N}$ можно зафиксировать, например, потребовав

$$\int DX e^{-\frac{1}{2}\|X\|^2} = \mathcal{N} \int \prod_{k=1}^{\infty} dx_k \exp\left(-\frac{T}{4} \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 \right) = 1 \tag{2.18}$$

где

$$\|X\|^2 = \int_0^T dt e(t) X(t)^2 = \int_0^1 dt \; T X(t)^2 \tag{2.19}$$

представляет собой ничто иное как репараметризационно-инвариантную норму, что с очевидностью даёт $\mathcal{N} = \prod_{k=1}^{\infty} \sqrt{\frac{T}{4\pi}}$. Тогда

$$I(T) = \mathcal{N} \prod_{k=1}^{\infty} \sqrt{\frac{4T}{\pi k^2}} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{T}{\pi k} \tag{2.20}$$

Чему равно бесконечное произведение в правой части? После логарифмирования

$$\log I(T) = \sum_{k=1}^{\infty} \log T - \sum_{k=1}^{\infty} \log(\pi k) \tag{2.21}$$

бесконечную константу (пока!) можно "забыть", а коэффициент перед $\log T$

$$\sum_{k=1}^{\infty} 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} \bigg|_{s=0} = \zeta(0) = -\tfrac{1}{2} \tag{2.22}$$

вычислить, например, с помощью аналитического продолжения ζ-функции [2]. Если действовать таким образом, то получаем

$$I(T) = \int_{X(0)=0}^{X(1)=0} DXe^{-\int_0^1 d\tau \frac{\dot{X}^2}{2T}} = \frac{\mathrm{const}}{\sqrt{T}} \tag{2.23}$$

а мультипликативной перенормировкой константу можно считать равной единице.

Очевидные обобщения:

- В случае многих переменных $X_\mu = X_\mu(\tau)$, $\mu = 1, \ldots, D$ - для D-мерной релятивистской механики
$$I(T) = \int_{X_\mu(0)=0}^{X_\mu(1)=0} DXe^{-\int_0^1 d\tau \frac{\dot{X}_\mu^2}{2T}} = \frac{1}{T^{D/2}} \tag{2.24}$$
- а для ненулевых граничных условий

$$I(T|X_1, X_0) = \int_{X^\mu(0)=X_0^\mu}^{X^\mu(1)=X_1^\mu} DXe^{-\int_0^1 d\tau \frac{\dot{X}_\mu^2}{2T}} = \frac{e^{-\frac{(X_1^\mu - X_0^\mu)^2}{2T}}}{T^{D/2}} \tag{2.25}$$

Вопрос: удовлетворяет ли ответ уравнению Шредингера - и если да, то почему?

2.3 Результат для пропагатора частицы

Таким образом, после проведенной перенормировки нам осталось проинтегрировать по метрикам De выражение $e^{-\frac{Tm^2}{2}} e^{-\frac{(X_1 - X_0)^2}{2T}} / T^{D/2}$, зависящее только от длины $T = \int_0^1 dte(t)$. При этом естественно считать, что

$$\int De\ f(T) = \int \frac{D\xi}{\mathcal{V}} \int_0^\infty dTJ(T)f(T) = \int_0^\infty dTJ(T)f(T) \tag{2.26}$$

где $\frac{D\xi}{\mathcal{V}}$ отвечает интегралу по группе репараметризаций, нормированный на ее объем, а $J(T)$ - якобиан, возникающих при замене переменных. Вычисление этого якобиана представляет собой отдельную нетривиальную задачу, но предположим пока, что ответ на этот вопрос очень простой, например $J(T) = 1$.

---

[2] Естественно, что и этот шаг нуждается в обосновании. Заметим сейчас только, что такой ответ получается и при другой естественной регуляризации - после вычисления суммы геометрической прогрессии $\sum_{k>0} e^{-\epsilon k}$ и выкидывания сингулярной части из нее при $\epsilon \to 0$.

Если действительно окажется так, то для интеграла по траекториям релятивистской частицы с закрепленными концами в пространстве-времени мы окончательно получаем

$$\mathcal{K}(X_1, X_0) = \int_{X(0)=X_0, X(1)=X_1} DeDX\ e^{-\int_0^1 dt\left(\frac{\dot{X}^2}{2e}+\frac{1}{2}em^2\right)} =$$
$$= \int De\ e^{-\frac{m^2}{2}T} \int_{X(0)=X_0, X(1)=X_1} DXe^{-\int_0^1 dt\frac{\dot{X}^2}{2e}} = \int_0^\infty dT\ \frac{e^{-\frac{(X_1^\mu - X_0^\mu)^2}{2T}-\frac{m^2}{2}T}}{T^{D/2}} \tag{2.27}$$

что действительно представляет собой представление в виде интеграла по собственному времени для фейнмановского пропагатора, или *причинной* функции Грина уравнения Клейна-Гордона - после аналитического продолжение в пространство Минковского. Интегральное представление удобно для анализа, например, асимптотических свойств:

- Ультрафиолетовое поведение на малых расстояниях, при $|X_1 - X_0| \to 0$, определяется вкладом малых длин T, массой частицы при этом можно пренебречь, и сделав замену переменных легко получить, что $\mathcal{K}(X_1, X_0) \sim \frac{1}{|X_1-X_0|^{D-2}}$ при $D > 2$.
- Инфракрасное поведение наоборот определяется свойствами интеграла при больших T, тут значение квадрата массы становится определяющим. Для массивных частиц $m^2 > 0$ интеграл подавлен при $|X_1 - X_0| > 1/m$, для безмассовых частиц возникает "дальнодействие", ну а для тахионов с $m^2 < 0$ просто с треском расходится - чего и следовало бы ожидать в случае бозонной струны.

Однако, многие шаги в приведенном качественном рассмотрении нам осталось еще по-настоящему обосновать.

2.4 Регуляризация и формула Пуассона

Вспомним, что мы начали вычислять *струнную корреляционную функцию* [3]

$$\mathcal{K}(X_1, X_0) = \int DeDX\ e^{-\int_0^1 dt\left(\frac{\dot{X}^2}{2e}+\frac{1}{2}em^2\right)} = \int De\ e^{-\frac{m^2}{2}\int_0^1 dte} \int DXe^{-\int_0^1 dt\frac{\dot{X}^2}{2e}} \tag{2.28}$$

для начала положив $e(t) = T$ в гауссовом интеграле

$$I(X_1, X_0; T) = \int DXe^{-\int_0^1 dt\frac{\dot{X}^2}{2T}} = e^{-\frac{(X_1-X_0)^2}{2T}} I(T) \tag{2.29}$$

где $I(T)$ интеграл уже с нулевыми граничными условиями.

[3]Корреляционные функции в одномерной теории, например $\langle X^\mu(t) X^\nu(t')\rangle_X$ мы потом разберем отдельно.

Распишем теперь аккуратнее результат гауссова интегрирования по координатам частицы с нулевыми условиями (во внешней одномерной метрике $e(t) = T$)

$$S[X;T] = \int_0^1 dt \frac{\dot{X}^2}{2T} = \tfrac{1}{2}\int_0^1 dt\; TX\left(-\frac{1}{T^2}\frac{d^2}{dt^2}\right)X = \tfrac{1}{2}(X, \Delta X) \tag{2.30}$$

где скалярное произведение согласовано с репараметризационно-инвариантной нормой

$$\|X\|^2 = \int_0^T d\tau X(\tau)^2 = \int_0^1 dt\; TX(t)^2 = \int_0^1 dte(t)X(t)^2 \tag{2.31}$$

Для нулевых граничных условий $\int DXe^{-S[X;T]} = (\det\Delta)^{-D/2}$, где

$$\det\Delta = \det\left(-\frac{1}{T^2}\frac{d^2}{dt^2}\right) = \prod_{n>0}\frac{\pi^2 n^2}{T^2} \tag{2.32}$$

или [4]

$$\begin{aligned} D(T) = -\log\det\left(-\frac{1}{T^2}\frac{d^2}{dt^2}\right) = -\mathrm{Tr}\log\left(-\frac{1}{T^2}\frac{d^2}{dt^2}\right) = \\ = -\sum_{n>0}\log\frac{\pi^2 n^2}{T^2} = \int_0^\infty \frac{dt}{t}\sum_{n>0} e^{-\frac{\pi^2 n^2 t}{T^2}} \end{aligned} \tag{2.34}$$

Ряд под интегралом сходится абсолютно при $t > 0$, но сам интеграл по параметру расходится на нижнем пределе $t \to 0$. Можно ввести регуляризацию - обрезание этого интеграла при $\epsilon^2 > 0$

$$\begin{aligned} D(T|\epsilon) = \int_{\epsilon^2}^\infty \frac{dt}{t}\sum_{n>0} e^{-\frac{\pi^2 n^2 t}{T^2}} \underset{t=T^2x}{=} \int_{\epsilon^2/T^2}^\infty \frac{dx}{x}\sum_{n>0} e^{-\pi^2 n^2 x} = \\ = \int_{\epsilon^2/T^2}^1 \frac{dx}{x}\sum_{n>0} e^{-\pi^2 n^2 x} + \int_1^\infty \frac{dx}{x}\sum_{n>0} e^{-\pi^2 n^2 x} = \\ \equiv D_0(T|\epsilon) + D_1 \end{aligned} \tag{2.35}$$

Второе слагаемое не зависит не только от ϵ, но и от длины траектории T, и является конечной константой (а на *конечные* константы в теорфизике часто можно просто "не обращать внимания").

[4] Это все те же формальные манипуляции с ζ-функциями:

$$\begin{aligned} \zeta_\Delta(s) = \sum_k \lambda_k^{-s} = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \frac{dt}{t} t^s \sum_k e^{-\lambda_k t} = s\zeta_\Delta(0)' + O(s^2) \\ \zeta_\Delta(0)' = -\sum_k \lambda_k^{-s}\log\lambda_k\Big|_{s=0} = \int_0^\infty \frac{dt}{t}\sum_k e^{-\lambda_k t} \end{aligned} \tag{2.33}$$

Для манипуляций с первым членом удобно вспомнить про тэта-функции и тэта-константы:

$$\begin{aligned} \theta(z|\tau) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{i\pi\tau n^2+2\pi i n z} \\ \theta(0|i\pi x) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi^2 n^2 x} = 1 + 2\sum_{n>0} e^{-\pi^2 n^2 x} \end{aligned} \tag{2.36}$$

и их модулярные преобразования [5]

$$\begin{aligned} \theta(0|-1/\tau) &= (-i\tau)^{1/2}\theta(0|\tau) \\ \theta(0|i\pi x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi x}}\theta(0|i/\pi x) = \frac{1}{\sqrt{\pi x}}\left(1 + 2\sum_{n>0} e^{-\frac{n^2}{x}}\right) \end{aligned} \tag{2.39}$$

Таким образом:

$$\begin{aligned} D_0(T|\epsilon) &= \int_{\epsilon^2/T^2}^1 \frac{dx}{x}\sum_{n>0} e^{-\pi^2 n^2 x} = \tfrac{1}{2}\int_{\epsilon^2/T^2}^1 \frac{dx}{x}\left(\theta(0|i\pi x) - 1\right) = \\ &= \tfrac{1}{2}\int_{\epsilon^2/T^2}^1 \frac{dx}{x}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi x}} - 1\right) + \int_{\epsilon^2/T^2}^1 \frac{dx}{x}\frac{1}{\sqrt{\pi x}}\sum_{n>0} e^{-\frac{n^2}{x}} = \\ &= \tfrac{1}{2}\int_{\epsilon^2/T^2}^1 \frac{dx}{x}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi x}} - 1\right) + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^1 \frac{dx}{x^{3/2}}\sum_{n>0} e^{-\frac{n^2}{x}} \end{aligned} \tag{2.40}$$

где второе слагаемое в правой части представляет собой уже сходящийся интеграл (при $\epsilon \to 0$), т.е. опять независящую от T *конечную* константу. Тем самым мы выделили *расходимость*

$$\begin{aligned} D_{\text{sing}}(T|\epsilon) &= \tfrac{1}{2}\int_{\epsilon^2/T^2}^1 \frac{dx}{x}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi x}} - 1\right) = -\left(\frac{1}{\sqrt{\pi x}} + \log\sqrt{x}\right)\Bigg|_{\epsilon^2/T^2}^1 = \\ &= \frac{T}{\sqrt{\pi}\epsilon} - \log\frac{T}{\epsilon} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} = \frac{T}{\sqrt{\pi}\epsilon} - \log\frac{T}{\epsilon} + \text{finite} \end{aligned} \tag{2.41}$$

---

[5] Являющиеся следствием формул пересуммирования Пуассона

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta(z-k) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-2\pi i n z}, \qquad \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} dz f(z) e^{-2\pi i n z} \tag{2.37}$$

для функции $f(z) = e^{-\pi^2 x z^2}$ при $x > 0$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-\pi^2 x k^2} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} dz e^{-\pi^2 x z^2} e^{-2\pi i n z} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\sqrt{\pi}}{\pi\sqrt{x}} e^{-\frac{n^2}{x}} \tag{2.38}$$

и получили, что

$$\det\left(-\frac{1}{T^2}\frac{d^2}{dt^2}\right) \simeq\ e^{-D_{\rm sing}(T|\epsilon)} = \frac{T}{\epsilon}\exp\left(-\frac{T}{\sqrt{\pi}\epsilon}\right) \tag{2.42}$$

с точностью до конечной константы.

2.5 Перенормировка: простейший вариант

Таким образом, для интеграла по путям частицы в D-мерном пространстве-времени получаем равенство (с точностью до несущественных конечных констант)

$$e^{-\frac{1}{2}Tm^2}I(T) = e^{-\frac{T}{2}\left(m^2-\frac{D}{\sqrt{\pi}\epsilon}\right)}\left(\frac{\epsilon}{T}\right)^{D/2} \tag{2.43}$$

и видим, что ответ имеет особенности при $\epsilon \to 0$ в двух местах. Важно, что обе эти особенности *устранимы.*

- Общий фактор $\epsilon^{D/2}$, связан с тем, что мы пытались выразить меру через интегрирование по коэффициентам Фурье. Это определение плохо учитывает вклад недифференцируемых траекторий [6], поэтому его можно использовать лишь с точностью до именно такого особого множителя. К счастью, сам этот множитель не зависит ни от каких физических параметров - прежде всего от длины $T = \int_0^1 dte(t)$, поэтому его можно просто "загнать в нормировку" меры.

- С сингулярной зависимостью от ϵ в экспоненте формулы (2.43) дело хуже, но избавиться от него можно очевидным образом: считать что затравочная масса сама зависит от обрезания ϵ, т.е. $m \to m_0(\epsilon)$, так что именно

$$m_0^2(\epsilon) - \frac{D}{\sqrt{\pi}\epsilon} = m^2 \tag{2.44}$$

  и является реальной физической массой частицы. Эта процедура, на первый взгляд полная глупость, называется квантовой перенормировкой классических параметров теории, и имеет реальный физический смысл [7].

- Теории, в которых сингулярности, возникающие при снятии обрезания, можно устранить переопределением изначально существующих в них параметров, называются *перенормируемыми.* Физический смысл перенормируемости достаточно прост - в таких теориях физика больших расстояний не зависит от того, что происходит на малых. В нашем случае - квантовые поправки к классическим траекториям частицы лишь слегка подправляют классическое движение по прямым, а вклады старших Фурье-мод несущественны.

[6] См. задачу про вычисление среднего квадрата скорости.

[7] Так например в данном случае легко понять, что если мы вычисляем на решетке с шагом ϵ сумму $\sum_{A\to B} e^{-mL(A,B)}$, где - $L(A,B)$ расстояние между точками A и B, то такая сумма имеет непрерывный предел только если сделать затравочную массу зависимой от шага решетки ϵ.

2.6 Мера на одномерных метриках

Разберем сначала простой пример двумерного интеграла

$$\int \frac{dxdy}{2\pi} f(\sqrt{x^2+y^2}) = \int \frac{d\phi}{2\pi} \int rdrf(r) = \int rdrf(r) \tag{2.45}$$

который является буквальным аналогом нашего (бесконечномерного!) интеграла после отождествлений

$$\int De \leftrightarrow \int \frac{dxdy}{2\pi}, \quad \int \frac{D\xi}{\mathcal{V}} \leftrightarrow \int \frac{d\phi}{2\pi}, \quad r \leftrightarrow T, \quad J(r) = r \tag{2.46}$$

Заметим, что якобиан можно вычислить следующим образом:

- Мера $\frac{dxdy}{2\pi}$ отвечает двумерной метрике $dx^2 + dy^2$;
- Для определения якобиана $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\phi)}$ достаточно рассмотреть гауссов интегралом в *касательном* (возможно точнее - кокасательном) пространстве:

$$\begin{gathered} 1 = \int \frac{d(\delta x)d(\delta y)}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}\left((\delta x)^2+(\delta y)^2\right)} = \\ = \frac{1}{2\pi}\int J(r)d(\delta r)d(\delta\phi)e^{-\frac{1}{2}\left((\delta r)^2+r^2(\delta\phi)^2\right)} = \frac{J(r)}{r} \end{gathered} \tag{2.47}$$

  который приводит, естественно, к ожидаемому ответу. Это одна из реализаций известного *трюка* Фаддеева-Попова.

По аналогии, для меры De введем репараметризационно-инвариантную норму в пространстве малых вариаций δe

$$\|\delta e\|^2 = (\delta e, \delta e) = \int_0^1 dte^{-1}(\delta e)^2 \tag{2.48}$$

и попытаемся ввести координаты во взаимно-ортогональных направлениях относительно этого скалярного произведения. При инфинитезимальной замене параметра на траектории $t \to t - \xi(t)$ одномерная метрика меняется почти очевидным образом

$$\delta_\varepsilon e = \dot{\xi}e + \xi\dot{e} = \frac{d}{dt}(\xi e) \tag{2.49}$$

и совсем очевидно, что ортогональным этому направлению $(\delta_\xi e, \delta_T e)$ при $\xi(0) = \xi(1) = 0$ будет вариация размера $\delta_T e = \frac{\delta T}{T}e$, а на подмногообразии постоянных метрик просто

$$\delta_T e(t) = \delta T \tag{2.50}$$

Больше никаких независимых направлений быть не должно - заменой параметра на траектории любую одномерную метрику можно сделать не зависящей от этого параметра. При этом для полной вариации из нормы (2.48) получим

$$\begin{gathered}\|\delta e\|^2 = \int_0^1 dte^{-1}(\delta e)^2 = \int_0^1 dte^{-1}(\delta_\xi e + \delta_T e)^2 = \\ = \int_0^1 dte^{-1}\left(\frac{d}{dt}(\xi e)\right)^2 + \frac{(\delta T)^2}{T^2}\int_0^1 dte = \int_0^1 dt\ e^3\ \xi\left(-e^{-2}\frac{d}{dt}e^{-1}\frac{d}{dt}e\right)\xi + \frac{(\delta T)^2}{T} = \\ = \int_0^1 dt\ e^3\ \xi\Delta_\xi(e)\xi + \frac{(\delta T)^2}{T} = (\xi, \Delta_\xi(e)\xi) + \frac{(\delta T)^2}{T}\end{gathered} \tag{2.51}$$

где мы ввели зависящий от метрики оператор Лапласа и инвариантную норму на векторных полях

$$\Delta_\xi(e)\xi = -e^{-2}\frac{d}{dt}e^{-1}\frac{d}{dt}e\cdot\xi, \qquad \|\xi\|^2 = (\xi,\xi) = \int_0^1 dt\ e^3(t)\ \xi^2(t) \tag{2.52}$$

После этого якобиан перехода от меры интегрирования по метрикам можно определить стандартным образом

$$\begin{gathered}1 = \int D(\delta e)\ e^{-\frac{1}{2}\|\delta e\|^2} = \int d(\delta T)\int D\xi\ e^{-\frac{1}{2}\|\delta e\|^2}J(T) = \\ = J(T)\int d(\delta T)e^{-\frac{1}{2}\frac{(\delta T)^2}{T}}\int D\xi\ e^{-\frac{1}{2}(\xi,\Delta_\xi(T)\xi)} = J(T)\sqrt{\frac{T}{\det\Delta_\xi(T)}}\end{gathered} \tag{2.53}$$

т.е. $J(T) = \sqrt{\frac{\det\Delta_\xi(T)}{T}}$, где детерминант оператора

$$\Delta_\xi(T) = -e^{-2}\frac{d}{dt}e^{-1}\frac{d}{dt}e\bigg|_{e(t)=T} = -\frac{1}{T^2}\frac{d^2}{dt^2} \tag{2.54}$$

действующего на функциях (векторных полях) $\xi(t)$, $0 < t < 1$, который мы уже вычислили (2.42). С учетом перенормировки массы и изменения нормировки меры можно считать, что $\Delta_\xi(T) \simeq T$, как и детерминант оператора (2.32), возникающего из квантовых флуктуаций координат частицы.

Так достаточно часто бывает, оказалось что якобиан что в случае траекторий с *фиксированными концами* $J(T) = 1$ (а например для замкнутых петель - не так!), а стало быть интеграл по одномерным метрикам $\int De \to \int_0^\infty dT$ с точностью до нормировки сводится к интегралу по физически различным конфигурациям - длинам траекторий, с простейшей из возможных мер.