

Задачи к спецкурсу "Категории и универсальная алгебра" (2015)

16. Постройте полное вложение категории MON моноидов и гомоморфизмов в категорию CAT.
17. *Монотонное отображение* предпорядка (X,R) в предпорядок (X',R') — это функция $f: X \rightarrow X'$, такая что если xRy , то $f(x)R'f(y)$. Постройте полное вложение категории POS предпорядков и монотонных отображений в CAT.
18. Постройте полное вложение SET в POS.
19. Для функторов $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ и $G: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ комма-категория $F \downarrow G$ определяется следующим образом.
 Объекты $F \downarrow G$ – тройки вида (A, f, B) , где $f: FA \rightarrow GB$;
 морфизмы (A, f, B) в (A', f', B') – это пары (a, b) , где $a: A \rightarrow A'$, $b: B \rightarrow B'$, для которых коммутативен квадрат

$$\begin{array}{ccc} & Fa & \\ FA & \rightarrow & FA' \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ & Gb & \\ GB & \rightarrow & GB' \end{array}$$

Тождественный морфизм для (A, f, B) определяется как $(1_A, 1_B)$.

Композиция определяется покомпонентно: $(a, b) \cdot (c, d) = (a \cdot c, b \cdot d)$

Проверьте, что это определение задает категорию.

20. Частный случай комма-категории, *категория стрелок* для \mathcal{C} , обозначается $\mathcal{C}^{\rightarrow}$ и определяется как $1_{\mathcal{C}} \downarrow 1_{\mathcal{C}}$.
 Докажите, что морфизм (a,b) в $\mathcal{C}^{\rightarrow}$ является изоморфизмом, если и только если a,b - изоморфизмы в \mathcal{C} .
21. а) Докажите, что если \mathcal{C} имеет начальный объект, то и $\mathcal{C}^{\rightarrow}$ имеет начальный объект.
 б) Найдите все начальные объекты в SET^{\rightarrow} .
22. а) Докажите, что если \mathcal{C} имеет финальный объект, то и $\mathcal{C}^{\rightarrow}$ имеет финальный объект.
 б) Найдите все финальные объекты в SET^{\rightarrow} .
23. Докажите, что $(\mathcal{C}^{\circ})^{\rightarrow} \cong \mathcal{C}^{\rightarrow}$.
24. Рассмотрим функторы $\text{Hom}(A, -)$ из SET в SET.
 Докажите, что если A непусто, то $\text{Hom}(A, -)$ - вложение категорий. Что можно сказать про $\text{Hom}(\emptyset, -)$?
25. При каких A функтор из предыдущей задачи является полным?