

Аффинные алгебры Ли и приложения

Домашняя работа 1

1. Докажите, что вторая симметрическая степень векторного представления $\mathfrak{sl}_2$ изоморфна присоединённому представлению.
2. Пусть V – неприводимое представление алгебры Ли. Докажите, что V^* также является неприводимым.
3. Рассмотрим подалгебру в $\mathfrak{so}_4$, состоящую из матриц вида

$$\begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ -a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & -b & 0 \end{pmatrix}.$$

Докажите, что это подалгебра Картана и найдите соответствующее корневое разложение.

3. Рассмотрим множество $R \subset \mathbb{R}^n$, состоящее из векторов вида

$$R = \{\pm e_i, \pm 2e_i, 1 \leq i \leq n\} \cup \{\pm e_i \pm e_j, 1 \leq i, j \leq n, i \neq j\}$$

где e_i – стандартный базис в $\mathbb{R}^n$. Докажите, что R является (неприведённой) системой корней (обычно обозначаемой BC_n).

4. Вычислите группу P/Q для систем A_n и D_n .
5. Разложите на неприводимые слагаемые тензорные произведения неприводимых представлений $L_{n\omega} \otimes L_{m\omega}$ алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2$.

Affine Lie algebras and applications

Homework 1

1. Prove that the second symmetric power of the vector representation of $\mathfrak{sl}_2$ is isomorphic to the adjoint representation.
2. Let V be an irreducible representation of a Lie algebra. Prove that V^* is irreducible as well.
3. Consider the following subalgebra inside $\mathfrak{so}_4$:

$$\begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ -a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & -b & 0 \end{pmatrix}.$$

Prove that this is a Cartan subalgebra and find the corresponding Cartan decomposition.

3. Let $R \subset \mathbb{R}^n$ be the set consisting of vectors of the form

$$R = \{\pm e_i, \pm 2e_i, 1 \leq i \leq n\} \cup \{\pm e_i \pm e_j, 1 \leq i, j \leq n, i \neq j\}$$

where e_i is the standard basis in $\mathbb{R}^n$. Prove that R is a (non reduced) root system (the BC_n system).

4. Compute the groups P/Q in types A_n and D_n .
5. Decompose the tensor products $L_{n\omega} \otimes L_{m\omega}$ of irreducible representations of $\mathfrak{sl}_2$ into irreducible components.